

**Střední škola průmyslová a umělecká, Opava,
příspěvková organizace**

Praskova 399/8, 746 01 Opava

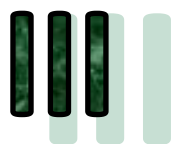


Mechanika

III

VÝUKOVÝ MANUÁL

Mechanika



Výukový manuál

Ing. Vítězslav Doleží

Opava 2019

Střední škola průmyslová a umělecká, Opava,
příspěvková organizace



Tato práce slouží pro výuku předmětu Mechaniky III na Střední škole
průmyslové a umělecké, Opava, příspěvkové organizaci.

Obsah

1	Úvod	5
1.1	Plán učiva	5
1.2	Pomůcky	5
1.3	Poznámky	6
2	Opakování kinematiky	6
2.1	Základní veličiny	6
2.2	Základní pohyby	6
3	Dynamika	12
3.1	Pohybové zákony	12
3.2	Setrvačná síla	13
3.3	Impuls síly a hybnost	14
3.4	Odstředivá a dostředivá síla	16
3.5	Mechanická práce	17
3.6	Práce síly proměnné velikosti	18
3.7	Výkon	19
3.8	Účinnost	20
3.9	Mechanická energie	21
3.10	Zákon o zachování energie	23
3.11	Dynamika těles	25
3.12	Vyvažování	52
4	Hydromechanika	60
4.1	Hydrostatika	60
4.2	Hydrodynamika	73
5	Termomechanika	102
5.1	Teplo a tepelný výkon	102
5.2	Teplotní roztažnost a rozpínavost látek	105
5.3	Změna skupenství	106
5.4	Termodynamika plynů	109
5.5	Termodynamika par	124
5.6	Tepelné oběhy	132
5.7	Sdílení tepla	140

1 Úvod

1.1 Plán učiva

- Úvod, základní pojmy.
- Opakování kinematiky.
- Dynamika.
 - Úvod, pohybové zákony (zákon setrvačnosti, zákon síly, zákon akce a reakce, impuls síly a hybnost tělesa, odstředivá a dostředivá síla);
 - mechanická práce, energie, výkon, příkon, účinnost;
 - dynamika posuvného pohybu tělesa, otáčivého a složeného pohybu;
 - vyvažování, ráz těles.
- Hydromechanika.
 - Úvod, základní pojmy;
 - fyzikální vlastnosti tekutin;
 - hydrostatika;
 - hydrodynamika.
- Termomechanika.
 - Úvod, základní pojmy;
 - plyny;
 - páry;
 - tepelné oběhy;
 - vlhký vzduch;
 - sdílení tepla;
 - proudění plynů a par.
- Na konci roku před uzavřením známek kontrola všech sešitů, sešity musí být v absolutním pořádku, se všemi nakreslenými obrázky, se vším dopsaným učivem, s okraji tuší.

1.2 Pomůcky

- Kniha Mechanika III – Dynamika pro SPŠ strojnické, M. Julina, V. Venclík, J. Kovář, SNTL.
- Kniha Mechanika IV – Mechanika tekutin a termomechanika pro SPŠ strojnické, V. Vondráček, I. Středa, V. Mamula, M. Hlinka, SNTL.
- Kniha Mechanika – Sběrka úloh, I. Turek, O. Skala, J. Haluška, SNTL.

- Kniha Strojnické tabulky, Jan Leinveber a Pavel Vávra, ALBRA.
- Čtverečkový sešit A4 tlustý, okraje tuší 3 cm od vnější strany.
- Domácí sešit A4 jakýkoliv bez okrajů.
- Pero a pentelka 0,5 mm.
- Guma na gumování.
- Trojúhelníkové pravítko s ryskou.
- Kalkulačka s goniometrickými funkcemi.

1.3 Poznámky

Opakovací písemka.

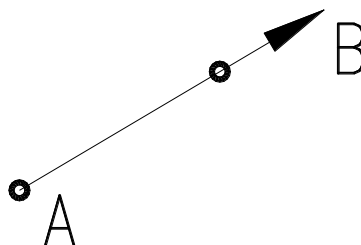
2 Opakování kinematiky

2.1 Základní veličiny

dráha – s [m], φ [rad];
 rychlost – v [m/s], ω [rad/s];
 zrychlení – a [m/s²], ε [rad/s²];
 čas – t [s].

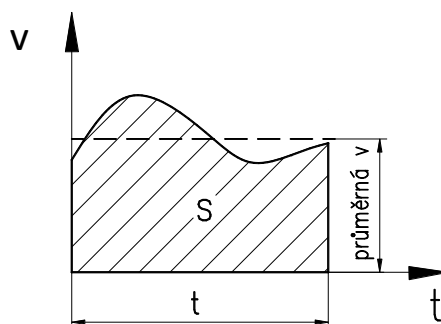
2.2 Základní pohyby

2.2.1 Přímočarý pohyb: Dráha je přímková



- **Rovnoměrný pohyb.**
 - $v = \text{konst.}$
 - $a = \text{konst.}$
- **Pohyb rovnoměrně zrychlený či zpžděný pohyb.**
 - $v \neq \text{konst.}$
 - $a = \text{konst.}$

- Obecný pohyb.

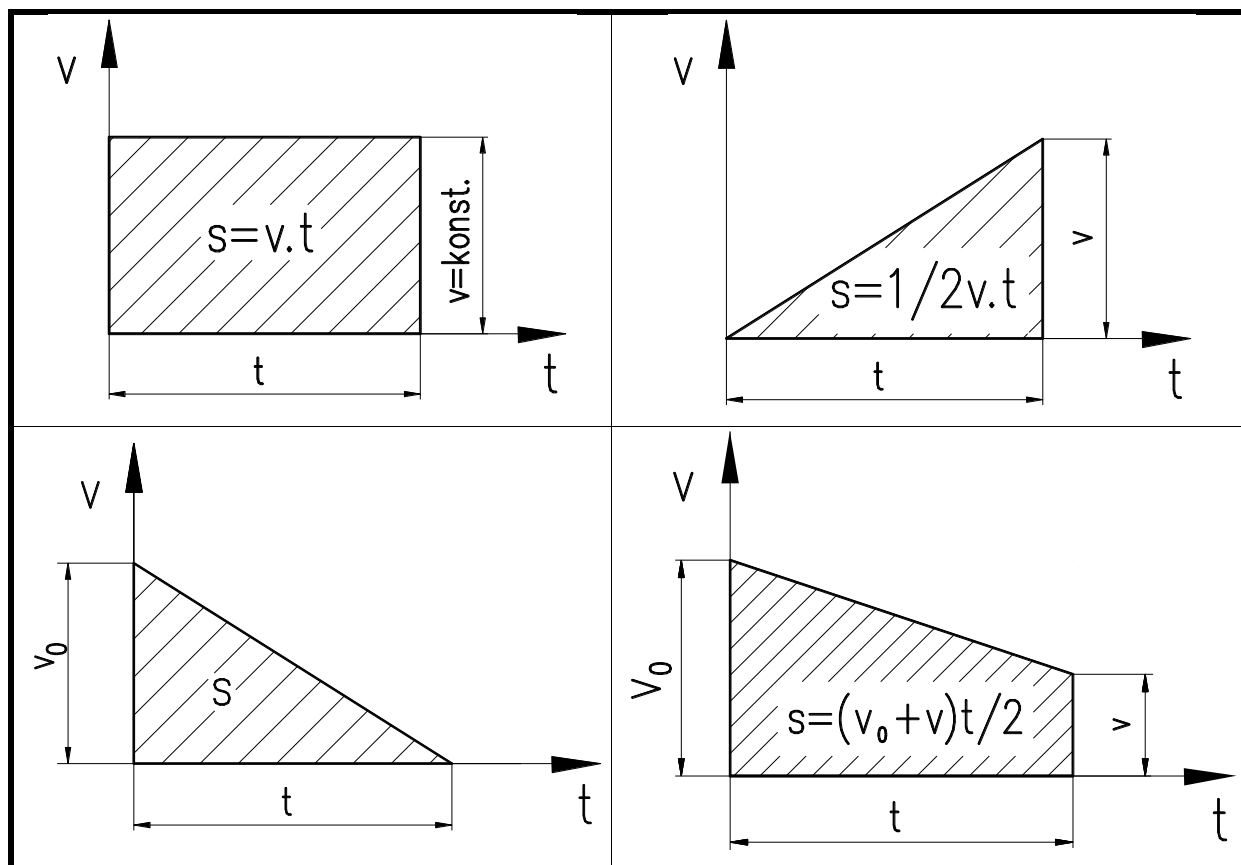


- Diagram $v - t$: Plocha pod křivkou odpovídá dráze.

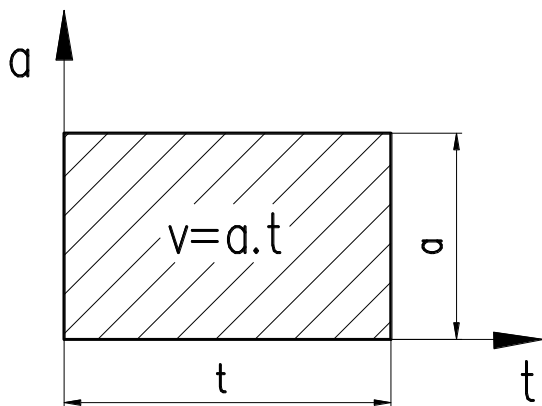
$$s = v \cdot t$$

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

pro $v_0 = 0$ platí: $s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$



- **Diagram a – t:** Plocha pod křivkou odpovídá rychlosti.



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

pro $v_0 = 0$ platí: $s = \frac{1}{2} v \cdot t = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ ($v = a \cdot t$)

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (v - v_0) \cdot t = \frac{v_0 + v}{2} t$$

- **Volný pád:** Rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$a = g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

$$s = h = \frac{1}{2} v \cdot t = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (v = a \cdot t = g \cdot t)$$

- **Svislý vrh:** Rovnoměrně zpzděný pohyb:

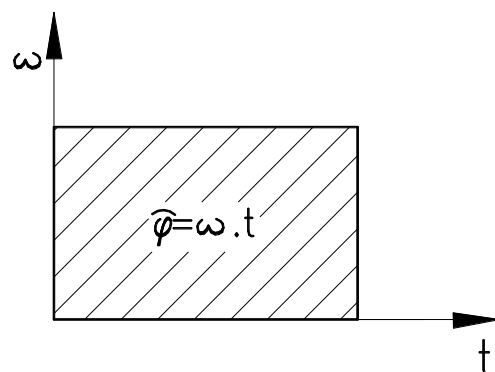
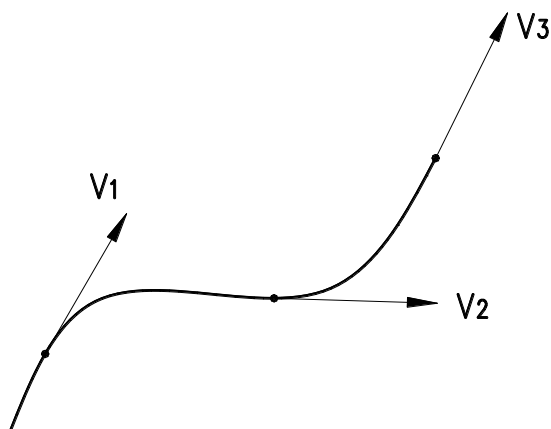
$$a = g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

výška vrhu:

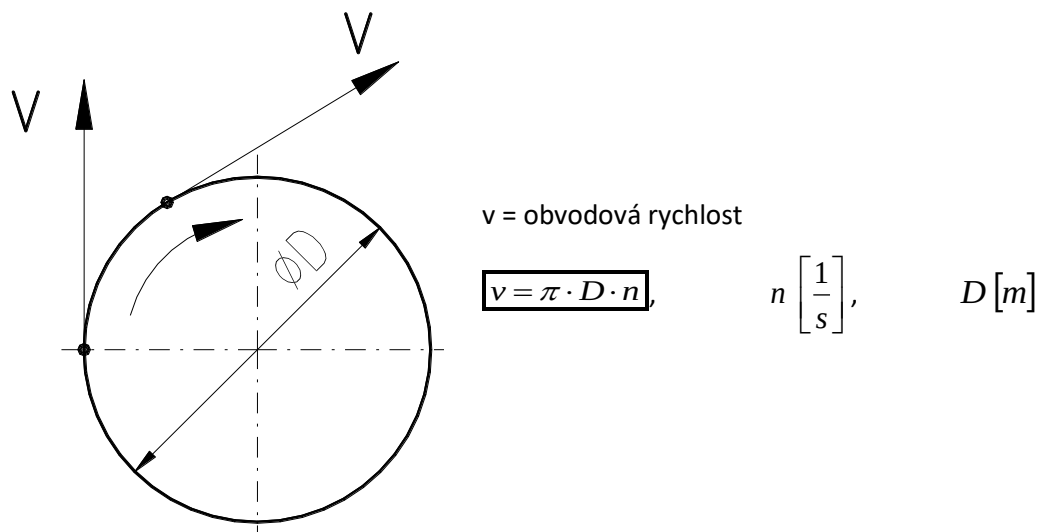
$$h = \frac{1}{2} v_0 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} \quad (v = a \cdot t = g \cdot t \rightarrow t = \frac{v}{g})$$

2.2.2 Křivočarý pohyb: Směr pohybu se neustále mění

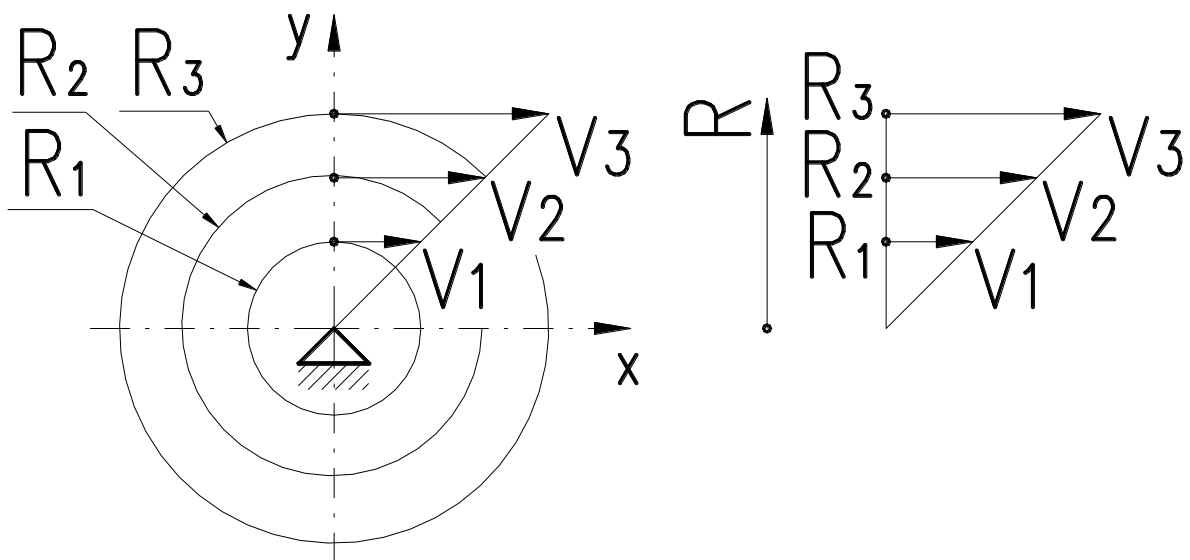
- **Obecný rovnoměrný pohyb křivočarý $v = \text{konst.}$**



- **Rovnoměrný pohyb bodu po kružnici** $v = \text{konst.}$



- **Rovnoměrný pohyb rotační kolem stálé osy:**



Všechny body tělesa na soustředných kružnicích mají jinou obvodovou rychlost a za 1 oběh oběhnou jinou dráhu. Proto zavádíme pojmy:

úhlová rychlost ω , která je stejná pro všechny body tělesa. Je to pootočení tělesa za jednotku času:

úhlová rychlost
$$\omega = \frac{\hat{\varphi}}{t} \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$$

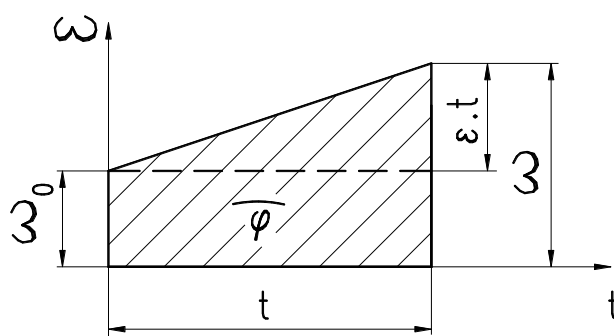
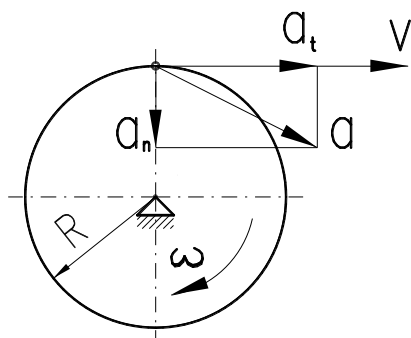
obvodová rychlost
$$v = R \cdot \omega$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \quad [s^{-1}]$$

1 otáčka = $2 \cdot \pi = \varphi$

i otáček = $i \cdot 2 \cdot \pi = i \cdot \varphi$

- Rovnoměrně zrychlený pohyb rotační:**



Dráha
$$\hat{\varphi} = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t$$

Úhlové zrychlení
$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{t}$$

Tečné zrychlení $a_t = R \cdot \varepsilon$ (ε – úhlové zrychlení) odpovídá změně velikosti obvodové rychlosti.

Dostředivé (normální) zrychlení $a_n = \frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2$: odpovídá změně směru rychlosti.

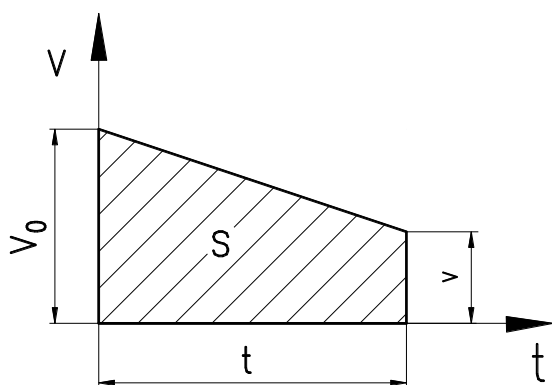
Výsledné zrychlení $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, $360^\circ = 2 \cdot \pi$ [rad]

2.2.3 Příklady:

Př.: Automobil jede rychlostí $v = 100$ km/h. Jakou dráhu ujede za 2,5 min?

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow s = v \cdot t = \frac{100}{60} \cdot 2,5 = 4,2 \text{ km}$$

Př.: Motocyklista jede rychlostí $v_0 = 50$ km/h. Během 13 s zvýší tuto rychlost na dvojnásobek. Jakou dráhu přitom ujede? Vypočtete i zrychlení.

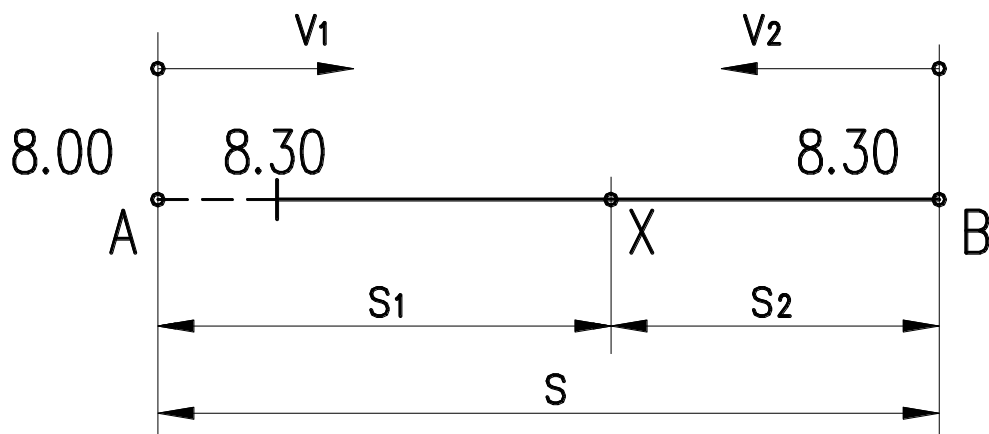


$$v = v_0 \cdot 2 = 50 \cdot 2 = 100 \text{ km/h}$$

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{50 + 100}{2} \cdot 13 \cdot \frac{1000}{3600} = 270,8 \text{ m}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(100 - 50) \cdot \frac{1000}{3600}}{13} = 1,1 \text{ m/s}^{-2}$$

Př.: Dvě města jsou do sebe vzdálena 119 km. Z města A vyjel v 8:00 hod. nákladní vlak rychlostí $v_1 = 30$ km/h. Z města B vyjel v 8:30 hod. osobní vlak rychlostí $v_2 = 50$ km/h. Za kolik hodin od vyjetí nákladního vlaku se oba vlaky setkají a v jaké vzdálenosti od města A?



$$s = s_1 + s_2 = v_1 \cdot t + v_2 \cdot (t - 0,5) = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t - 0,5 \cdot v_2 = t \cdot (v_1 + v_2) - 0,5 \cdot v_2 \rightarrow$$

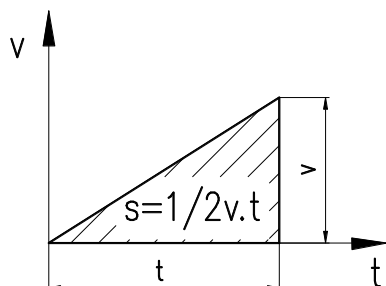
$$t = \frac{s + 0,5 \cdot v_2}{v_1 + v_2} = \frac{119 + 0,5 \cdot 50}{30 + 50} = 1,8h$$

$$s_1 = v_1 \cdot t = 30 \cdot 1,8 = 54 \text{ km}$$

$$s_2 = v_2 \cdot (t - 0,5) = 50 \cdot (1,8 - 0,5) = 65 \text{ km}$$

$$\text{kontrola: } s = s_1 + s_2 = 54 + 65 = 119 \text{ km.}$$

Př.: Z vrcholu věže byl spuštěn kámen, který po 4 s dopadl na zem. Jaká je výška věže?



$$h = \frac{1}{2} v \cdot t = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 4^2 = 78,48m$$

Př.: Závodní automobil jede rychlostí $v = 252 \text{ km/h}$ (obvodová rychlost kola) a má kola o průměru 660 mm (0,66 m). Jaká je úhlová rychlost kol ω a kolik otáček konají kola za sekundu?

$$v = R \cdot \omega \rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{252 \cdot 1000}{3600 \cdot 0,33} = 212,12 \text{ rad/s}$$

$$v = \pi \cdot D \cdot n \rightarrow n = \frac{v}{\pi \cdot D} = \frac{252 \cdot 1000}{3600 \cdot \pi \cdot 0,66} = 33,76 \text{ s}^{-1}$$

Př.: Parní turbína má 60 ot/s a průměr kola $D = 1500 \text{ mm}$. Po zastavení přívodu páry se zastavuje se zpožděním $a_t = 0,12 \text{ m/s}^2$. Určete počáteční obvodovou rychlost, za jak dlouho se turbína zastaví a jaké má úhlové zpoždění.

$$v = \pi \cdot D \cdot n = \pi \cdot 1,5 \cdot 60 = 282,7 \text{ m/s}$$

úhlové zrychlení/zpoždění ε :
$$a_t = R \cdot \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{a_t}{R} = \frac{0,12}{0,75} = 0,16 \text{ s}^{-2}$$

úhlové rychlost ω :
$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 376,99 \text{ s}^{-1}$$

čas t :
$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} \rightarrow t = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{376,99}{0,16} = 2356 \text{ s} = 39,26 \text{ min}$$

3 Dynamika

Kinematika je věda o pohybu těles. Určuje průběh pohybu v prostoru a čase.

Dynamika uvažuje kromě pohybu i jeho příčinu, tj. sílu.

V dynamice síly působící na dokonale tuhé těleso nejsou v rovnováze (na rozdíl od statiky).

Těleso je tvořeno soustavou hmotných bodů. Předpokládáme, že veškerá hmotnost tělesa je soustředěna v jeho těžišti. Pohyb tělesa potom můžeme zkoumat jako pohyb hmotného bodu.

3.1 Pohybové zákony

Základní zákony dynamiky přesně vyjádřil anglický fyzik Isaac Newton na základě zkušeností svých předchůdců, italského fyzika Galileia Galileiho, holandského vědce Christiana Huggense a vlastních pokusů.

Mechanika založená na těchto zákonech se nazývá Newtonova nebo–li klasická mechanika.

Newtonova mechanika je určena pro pohyby běžnými rychlostmi, které se v technické praxi vyskytují.

Pohybové zákony:

- zákon setrvačnosti;
- zákon zrychlující síly;
- zákon akce a reakce.

3.1.1 Zákon setrvačnosti

Každé těleso setrvává v klidu nebo pohybu přímočarém rovnoměrném, není–li nuceno vnějšími silami tento stav změnit.

Tato základní vlastnost každého tělesa se nazývá setrvačnost. Např. kámen na zemi, zavěšené kyvadlo atd., se neuvedou do pohybu samy. Projevy setrvačnosti: cestující při zastavování, rozjíždění, zatáčení vlaku atd. se naklánějí.

3.1.2 Zákon zrychlující síly

Příčinou změny pohybového stavu hmotnosti tělesa je zrychlující síla. Každá síla **F** uděluje hmotnosti **m** zrychlení **a**. Zrychlující síla je rovna součinu hmotnosti tělesa a jeho zrychlení.

$$\boxed{F = m \cdot a}, \quad [N] = \frac{[kg] \cdot [m]}{[s^2]}$$

Velmi důležitou zrychlující silou je tíhová síla – tíha **G**, která udílí každému tělesu tíhové zrychlení **g**.

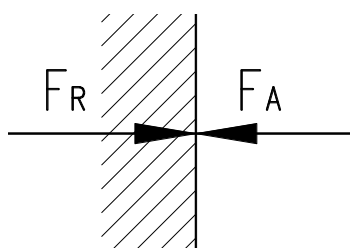
$$\boxed{G = m \cdot g}$$

Tíhové zrychlení **g** je různé v různých zeměpisných šířkách (u nás $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Př.: Jaké síly **F** je potřeba, aby se auto o hmotnosti $m = 900 \text{ kg}$ rozjelo se zrychlením $a = 0,3 \text{ m/s}^2$?

$$F = m \cdot a = 900 \cdot 0,3 = 270 \text{ N}$$

3.1.3 Zákon akce a reakce



Každá akce budí stejně velkou reakci, tj. sílu stejné velikosti, stejného směru, ale opačného smyslu.

Tlačíme-li na stěnu silou, cítíme její odpor, tj. sílu v opačném smyslu.

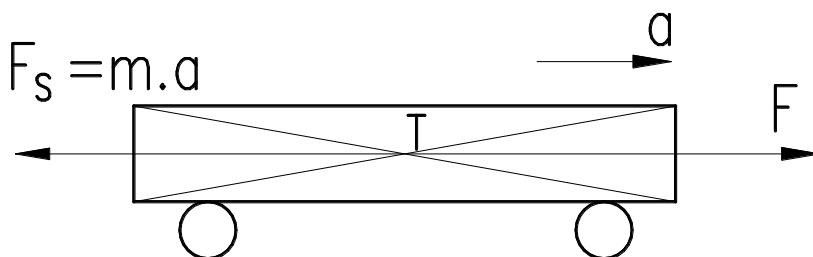
3.2 Setrvačná síla

Působí-li na volné těleso (vozík) akční síla **F** vyvolující zrychlení **a**, vzniká proti ní podle zákona akce a reakce stejně velká síla reakční, setrvačná síla stejného směru, ale opačného smyslu.

$$|F| = |F_s|, \quad \text{tedy i} \quad F_s = m \cdot a$$

F – zrychlující síla;

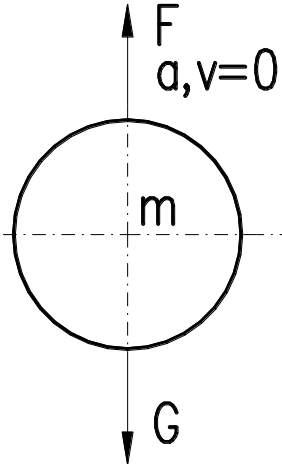
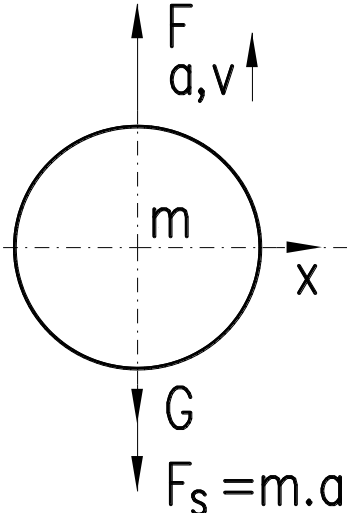
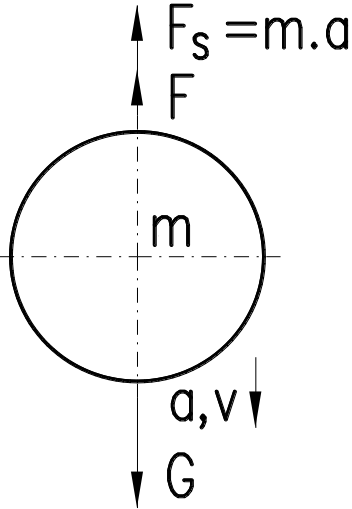
F_s – setrvačná síla.



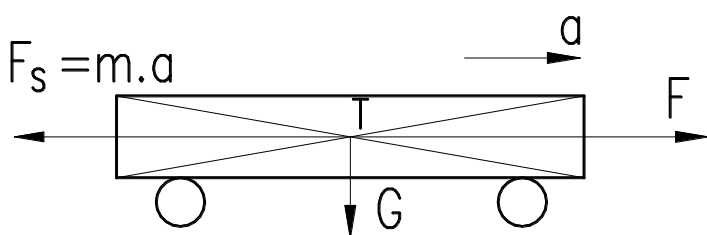
Setrvačná síla působí v těžišti tělesa a je vlastně reakcí hmotnosti, kterou brání změně pohybového stavu.

Např. těleso o tíze **G** je zavěšeno na vlákne (hmotnost vlákna pomíjíme).

Je-li těleso v klidu, je vlákno nataženo dolů tíhovou silou **G**, z principu akce a reakce na závěs působí síla **F** stejně velká jako **G**.

	V KLIDU 	POHYB VZHŮRU 	POHYB DOLŮ 
	V klidu $F - G = 0$ $F = G$ $m \cdot a = m \cdot g$ $a = g$	Pohyb vzhůru $F > G$ $F - G - F_s = 0$ $F = G + m \cdot a$ $F = m \cdot (g + a)$	Pohyb dolů $F < G$ $F + F_s - G = 0$ $F + m \cdot a - G = 0$ $F = G - m \cdot a$ $F = m \cdot g - m \cdot a$ $F = m \cdot (g - a)$

Př.: Jak velká je tažná síla automobilu o hmotnosti $m = 1200 \text{ kg}$, který dosáhne rychlosti 100 km/h z klidu za 20 s ? Odpor proti jízdě je $0,01 \cdot G$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.



$$a = \frac{v}{t} = \frac{100 \cdot 1000}{3600 \cdot 20} = 1,39 \text{ m/s}^2$$

$$F = m \cdot a + 0,01 \cdot m \cdot g = 1200 \cdot 1,39 + 0,01 \cdot 1200 \cdot 10 = 1788 \text{ N}$$

3.3 Impuls síly a hybnost

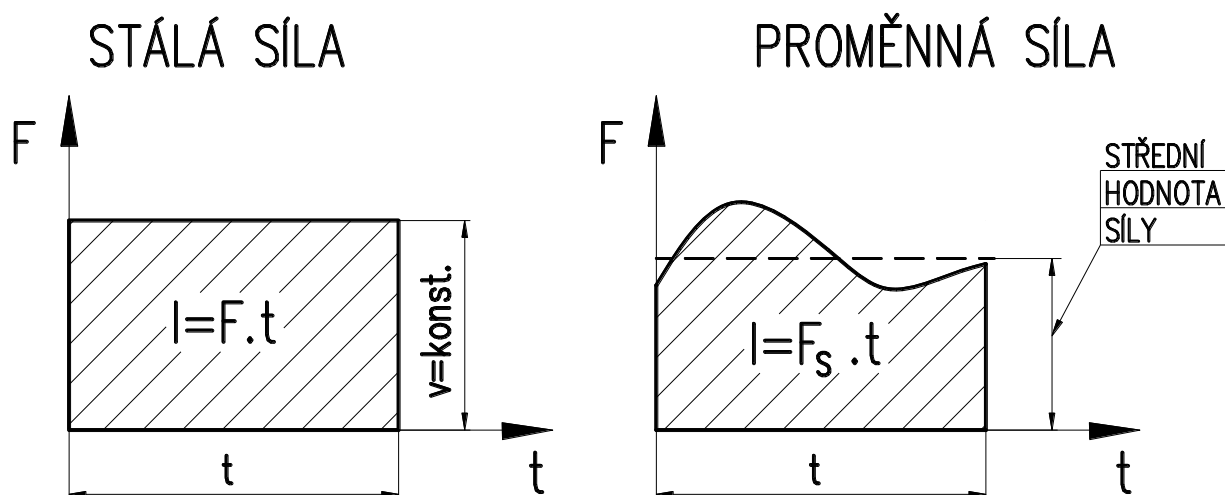
Zrychlující síla F uvádí těleso o hmotnosti m se zrychlením a do pohybu. Za t sekund dosáhne těleso rychlosti $v = a \cdot t$. Násobíme-li základní rovnici $F = m \cdot a$ dobou t , dostaneme:

$$\underbrace{F \cdot t}_I = m \cdot a \cdot t = \underbrace{m \cdot v}_H \quad \left(a = \frac{v}{t}\right)$$

Impuls síly $I = F \cdot t [N \cdot s]$ je to časový účinek síly.

Hybnost $H = m \cdot v [kg \cdot m \cdot s^{-1}]$

3.3.1 Grafické znázornění impulsů



Impuls síly – je to časový účinek síly $I = F \cdot t$

Uvádí-li se těleso do pohybu, je impuls síly roven hybnosti:

$$I = F \cdot t = H = m \cdot v$$

Jestliže se těleso již pohybuje nějakou rychlostí a začne na něj působit impuls síly, potom se impuls síly rovná rozdílu hybností.

$$I = F \cdot t = H - H_0 = m \cdot v - m \cdot v_0 = m \cdot (v - v_0)$$

Stejně velký impuls síly udělí všem tělesům o stejné hmotnosti stejnou hybnost, tedy i stejnou rychlost.

Působí-li na sebe dvě tělesa o různých hmotnostech m_1 a m_2 po stejnou dobu silami opačného smyslu, jsou i jejich impulzy opačné.

$$F_1 \cdot t = F_2 \cdot t$$

A pokud působily síly na tělesa v klidu, jsou i jejich hybnosti H_1 a H_2 opačné:

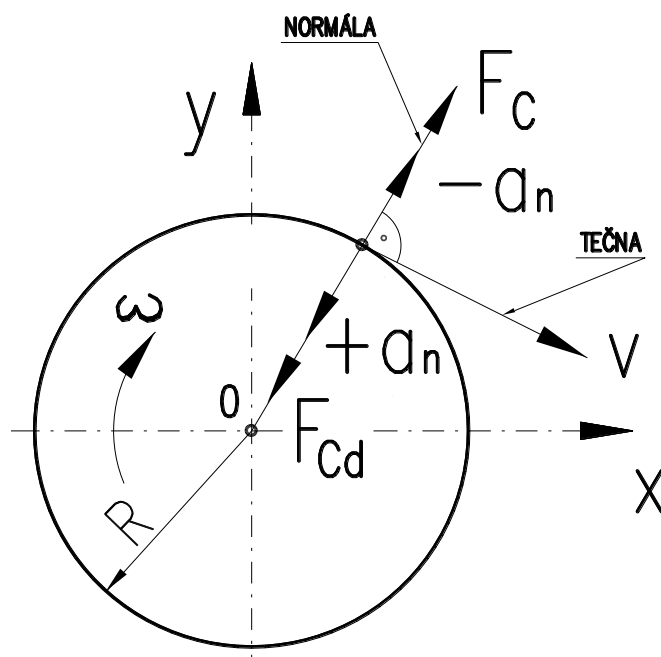
$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$

Př.: Střela o hmotnosti $m_1 = 8$ kg opouští dělovou hlaveň rychlostí $v_1 = 600$ m/s. Jakou zpětnou rychlostí v_2 se pohybuje hlaveň děla o hmotnosti $m_2 = 400$ kg?

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2; \quad v_2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot v_1 = \frac{8 \cdot 600}{400} = 12 \text{ m/s}$$

3.4 Odstředivá a dostředivá síla

Při rovnoměrném rotačním pohybu hmotného bodu kolem stálé osy je směr rychlosti bodu v libovolném místě své dráhy tečnou ke dráze v tomto místě. Má-li se hmotný bod pohybovat po kružnici, musí na něj působit síla, která jej udržuje na kruhové dráze a působí do středu. Působí ve směru normály a vyvoluje dostředivé zrychlení $+ a_n$.



$$\text{Zrychlení } a_n = \frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2$$

$$\text{Dostředivá síla } F_{cd} = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot R \cdot \omega^2 \text{ [N]}$$

ω – úhlová rychlost.

Tato akční síla F_{cd} vyvoluje reakční sílu odstředivou, stejně velkou, stejného směru, ale opačného smyslu.

$$F_c = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot R \cdot \omega^2 = F_{cd} \text{ [N]}$$

R – vzdálenost těžiště tělesa od síly otáčení (pro tělesa).

Například kulička na motouzu (roztočím, při uvolnění odletí směrem tečny), jiskry od brusného kotouče, ...

Př.: Řemenice o hmotnosti $m = 120 \text{ kg}$ koná 6 otáček za sekundu. Jaká je nevyvážená odstředivá síla F_c , leží-li těžiště řemenice 2 mm od osy otáčení ($e = 2 \text{ mm}$)?

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

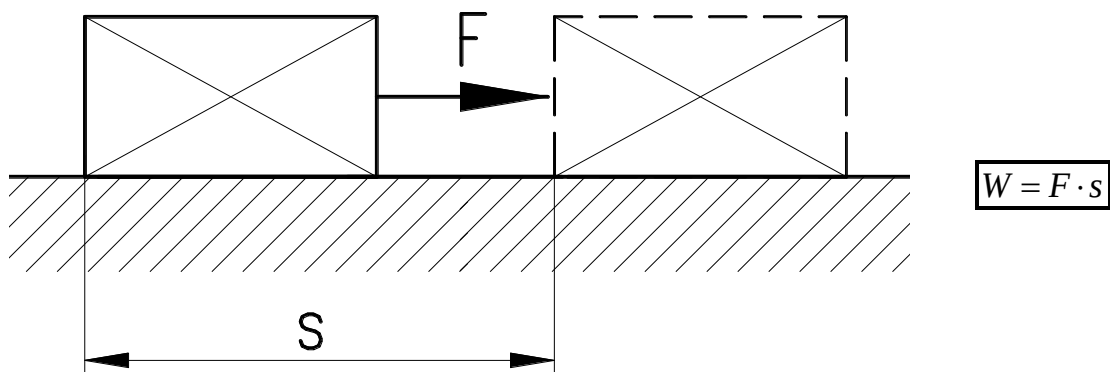
$$F_c = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot e \cdot \omega^2 = 120 \cdot 0,002 \cdot (2 \cdot 3,14 \cdot 6)^2 = 340,7 \text{ N}$$

3.5 Mechanická práce

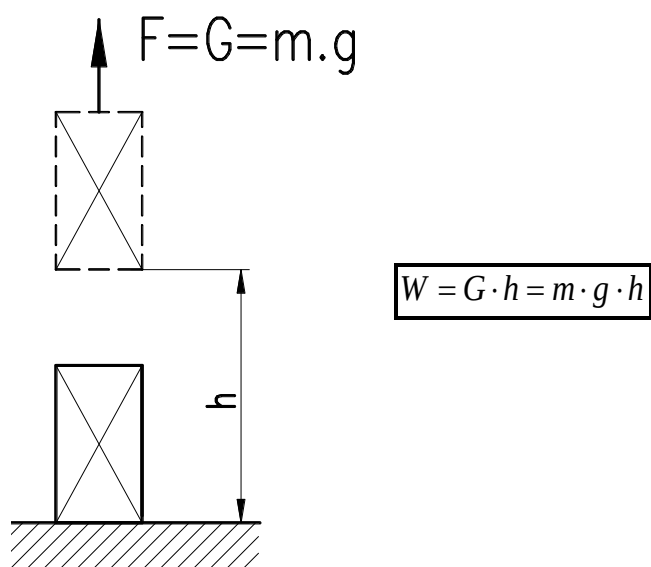
Pohybuje-li se hmotný bod nebo těleso po určité dráze, musí na něj působit určitá hnací síla, protože těleso klade odpor proti pohybu.

Překonáváme-li odpor tělesa silou po určité dráze, konáme mechanickou práci.

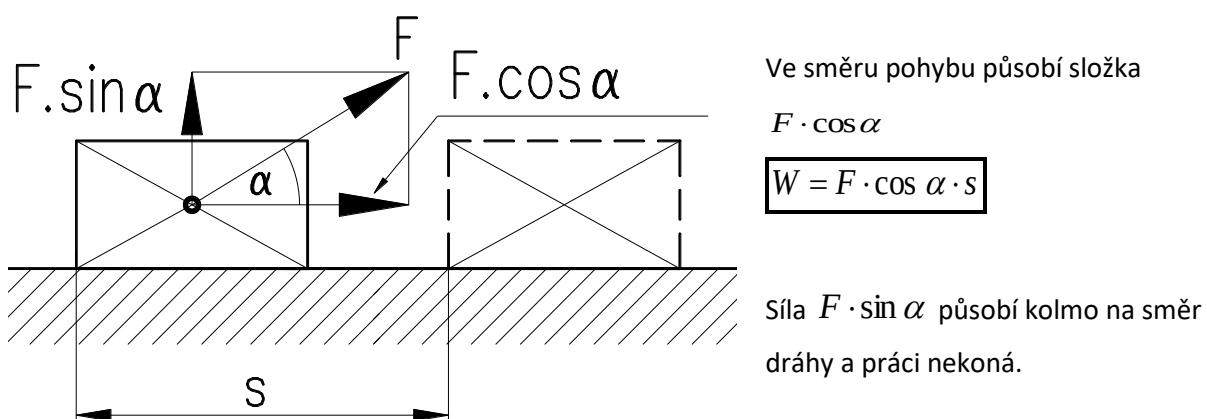
Mechanická práce je daná součinem síly a dráhy ve směru síly.



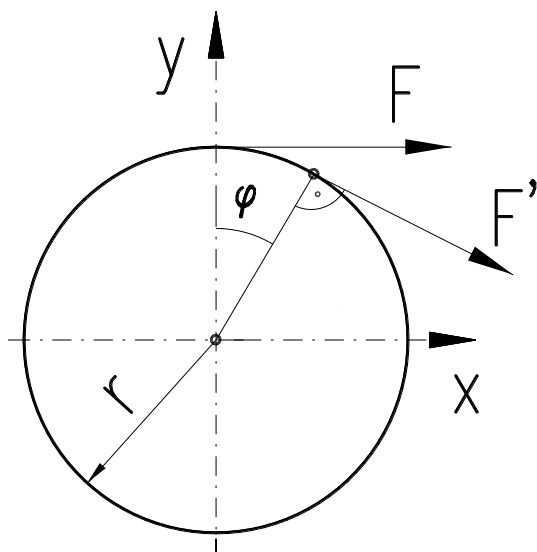
Při zvedání těles:



V případě, že směr síly a směr dráhy není shodný, provádíme rozklad síly nebo dráhy.



Při rotačním pohybu je práce dána vztahem:



$$W = F \cdot s$$

$$s = r \cdot \hat{\varphi} \quad (\varphi \text{ [rad]})$$

$$W = F \cdot s = F \cdot r \cdot \hat{\varphi}$$

$$F \cdot r = M$$

$$\boxed{W = M \cdot \hat{\varphi}}$$

$$W = F \cdot s$$

$$s = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$\text{pro } n \text{ otáček: } s = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot n$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$M_K = F \cdot r$$

$$W = F \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot n \rightarrow W = M_K \cdot 2 \cdot \pi \cdot n = M_K \cdot \omega$$

$$\boxed{W = M_K \cdot \omega}$$

Jednotku práce 1 Joule: $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$

Mechanická práce **W** obvodové síly je dána součinem **M_K** a úhlu pootočení φ v obloukové míře.

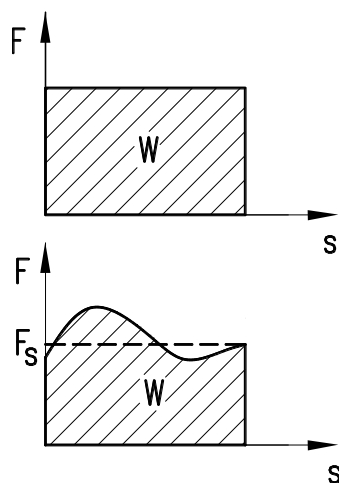
$$\boxed{W = M_K \cdot \hat{\varphi}}$$

Př.: Řezný odpor při hoblování je 3000 N, zdvih nože je 800 mm. Jaká práce se spotřebuje ohoblováním 1 třísky? $F = 3000 \text{ N}$, $s = 800 \text{ mm} = 0,8 \text{ m}$, $W = ?$

$$W = F \cdot s = 3000 \cdot 0,8 = 2400 \text{ J}$$

3.6 Práce síly proměnné velikosti

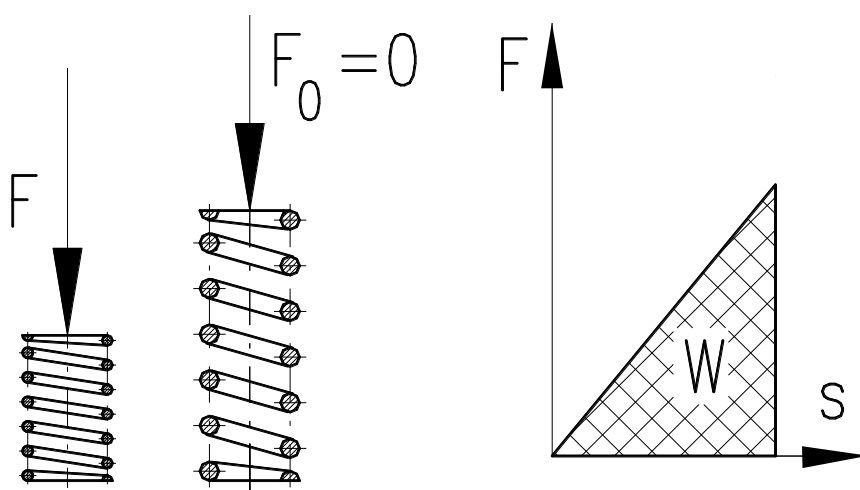
V diagramu $F - s$ vyjadřuje plocha pod čarou mechanickou prací.



$$W = F_s \cdot s$$

F_s – střední síla

Síla potřebná ke stlačení nebo natažení šroubové válcové pružiny:



$$W = \frac{1}{2} F \cdot s$$

Př.: Šroubová válcová pružina se při zatížení silou $F = 100 \text{ N}$ stlačí o 50 mm . Určete velikost práce vynaložené k tomuto stlačení.

$$W = \frac{1}{2} F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 50 \text{ Nmm} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,05 \text{ Nm} = 2,5 \text{ J}$$

3.7 Výkon

Výkon je mechanická práce vykonaná za jednotku času.

$$\text{výkon} = \frac{\text{práce}}{\text{čas}} \quad [1W] = \left[\frac{1J}{1s} \right] = \left[N \cdot m \cdot \frac{1}{s} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot m \cdot \frac{1}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right]$$

$$v = r \cdot \omega, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot n, \quad M = F \cdot r$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v = F \cdot r \cdot \omega = M \cdot \omega$$

$$P = M \cdot \omega$$

Pokud ze vztahu pro výkon vyjádřím práci, pak:

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow W = P \cdot t \quad [W \cdot s, kWh]$$

Jednotka práce je také $1W \cdot s = 1J$

Často neprobíhá práce rovnoměrně s časem a vztahy pro výkon jsou složitější. Základní rovnice pak udává průměrný (střední) výkon, i když může být výkon v každém okamžiku jiný.

$$\text{průměrný výkon} = \frac{\text{celková práce}}{\text{celkový čas}} = P_s = \frac{W}{t}$$

$$\text{okamžitý výkon } P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

kde ΔW je práce vykonaná v průběhu malého časového úseku Δt .

Př.: Lokomotiva vyvine při rychlosti 108km/h tažnou sílu 25 kN. Určete její výkon.

$$F = 25kN = 25000 N$$

$$v = 108km/h = 30m/s$$

$$P = F \cdot v = 25000 \cdot 30 = 750\,000 W = 750 kW$$

Př.: Zvedací zařízení jeřábu zvedne břemeno $m = 10 t$ (10 000 kg) do výšky 5 m za 20 s. Určete výkon.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{G \cdot h}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{10\,000 \cdot 10 \cdot 5}{20} = 25000 W = 25kW$$

Př.: Čerpadlo dopraví do výšky $h = 25 m$ za 1 hodinu $V = 1,8 m^3$ vody. Určete výkon.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{1800 \cdot 10 \cdot 25}{3600} = 125W$$

$$m = V \cdot \rho = 1,8 \cdot 1000 = 1800 kg$$

3.8 Účinnost

Práce se koná při překonávání odporu. U každého stroje se vyskytují kromě užitečného odporu i odpory neužitečné – škodlivé (např. tření). Proto celková přivedená práce je dána součtem práce užitečné a práce ztrátové.

$$W = W_{už} + W_{zt}$$

Podobně tzv. příkon je dán součtem užitečného a ztrátového výkonu. Účinnost zařízení je dána podílem práce užitečné a práce celkové.

Příklad: $P_{př} = P_{už} + P_z$

$$\eta = \frac{\text{práce užitečná}}{\text{práce užitečná} + \text{neužitečná}} \quad [\text{éta}]$$

$$\eta = \frac{W_{už}}{W_{už} + W_z} = \frac{P_{už}}{P_{už} + P_z}$$

$$P_{př} = \frac{P}{\eta}, \quad \eta = \frac{P}{P_{př}}$$

$\eta < 1$ Účinnost je vždy < 1 (menší než 100 %)

U složitějších zařízení je celková účinnost dána součinem účinností jednotlivých prvků zařízení.

$$\eta_C = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3$$

Př.: Vypočítejte příkon elektromotoru, který zvedá břemeno 20 t rychlostí $4 \text{ m/min} = 0,067 \text{ m/s}$, je-li účinnost zvedacího zařízení $\eta_z = 0,6$; $\eta_{\text{motoru}} = 0,9$.

$$P = \frac{W}{t} = F \cdot v = G \cdot v = m \cdot g \cdot v = 20000 \cdot 10 \cdot 0,067 = 13400 \text{ W}$$

$$\eta_C = \eta_z \cdot \eta_{\text{Motoru}}$$

$$P_{př} = \frac{P}{\eta_C} = \frac{13400}{0,6 \cdot 0,9} = 24815 \text{ W} = 24 \text{ kW}$$

Př.: Jaký je užitečný výkon a příkon vodní turbíny, protéká-li jí 24 m^3 vody za 1 sekundu se spádem 50 m, je-li účinnost turbíny $\eta = 80\%$?

$$V = 24 \text{ m}^3 \rightarrow m = 24000 \text{ kg} (m = V \cdot \rho)$$

$$P_{př} = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{G \cdot h}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$$

$$P_{př} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{24000 \cdot 10 \cdot 50}{1} = 12000000 \text{ W} = 12 \text{ MW}$$

$$P_{už} = P_{př} \cdot \eta = 12 \cdot 0,8 = 9,6 \text{ MW}$$

3.9 Mechanická energie

Každé těleso je schopno konat práci, jestliže se pohybuje anebo se začne pohybovat. Tuto schopnost nazýváme **energií**. Velikost energie posuzujeme podle velikosti práce, kterou může těleso vykonávat.

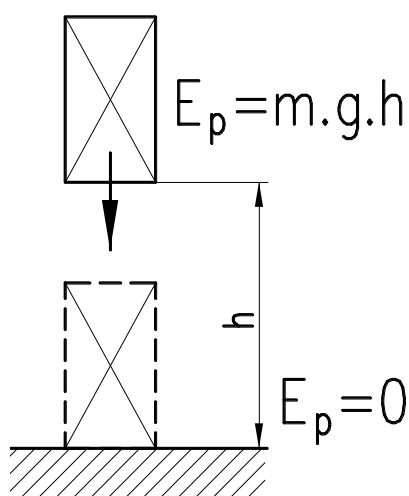
Proto jednotky energie a práce jsou stejné – $[J]$ – Joule.

Ve strojírenské praxi je nejdůležitější energie mechanická, která se dělí na:

a) **Polohovou** – potenciální

b) **Kinetickou** – pohybovou

a) **Energie polohová**



Zvedneme-li těleso o hmotnosti m do výšky h ,

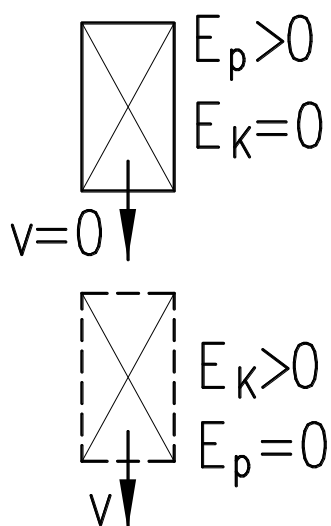
vykonali jsme práci $W = m \cdot g \cdot h$

Uvolníme-li těleso, je těleso schopno vrátit se do původní polohy, tedy musí platit:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

Obdobně stlačená pružina má energii potenciální, protože při uvolnění může pružina práci vrátit.

b) **Energie kinetická**



Padá-li těleso, zmenšuje se jeho potenciální energie, protože se zmenšuje výška jeho polohy h . Současně se však zvětšuje rychlost z původní nulové hodnoty na konečnou rychlost v .

Při dopadu z výšky h může konat práci:

$$W = m \cdot g \cdot h$$

$$s = h = \frac{1}{2} v \cdot t \text{ (při rychlosti z nuly),}$$

$$a = \frac{v}{t} \rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{v}{g}$$

$$W = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot \frac{1}{2} v \cdot t = m \cdot g \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Takže má při pohybu energii kinetickou:

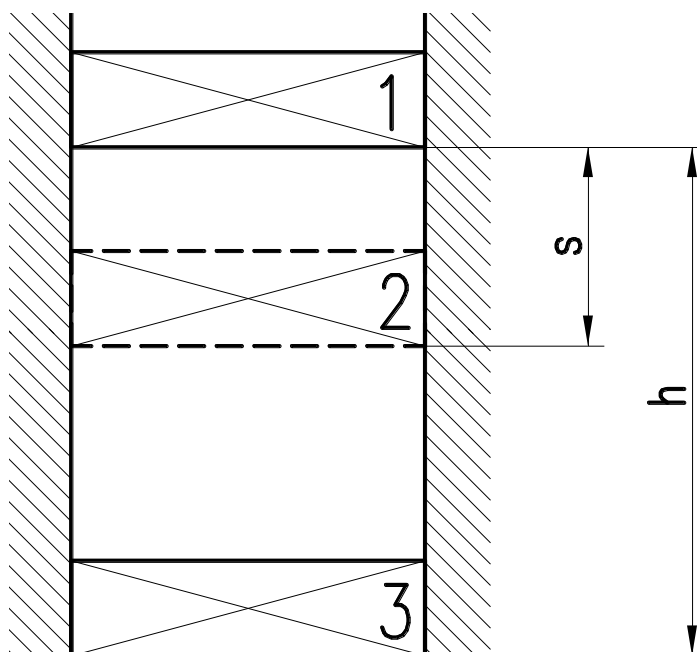
$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

To vše platí pro počáteční rychlost nulovou. Bude-li počáteční rychlost v_0 , bude počáteční kinetická energie:

$$E_{K0} = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$$

Práce zrychlující síly F na dráze s potom způsobí přírůstek pohybové energie:

$$E = E_K - E_{K0} = \frac{1}{2} m \cdot (v^2 - v_0^2)$$



Poloha 1

$$E_K = 0$$

$$E_P = m \cdot g \cdot h$$

Poloha 2

$$E_K = m \cdot g \cdot s$$

$$E_P = m \cdot g \cdot (h - s)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s}$$

Poloha 3

$$E_K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_P = 0$$

$$\text{Energie celková: } E_C = E_P + E_K$$

3.10 Zákon o zachování energie

Energie se neztrácí ani nevzniká. Jenom se přeměňuje.

Př.: Těleso o hmotnosti $m = 50 \text{ kg}$ se pohybuje rychlostí $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Jak se změní jeho rychlost, jestliže na dráze $s = 10 \text{ m}$ se bude na něj působit silou $F = 20 \text{ N}$?

$$W = E_K$$

$$W = F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot (v^2 - v_0^2)$$

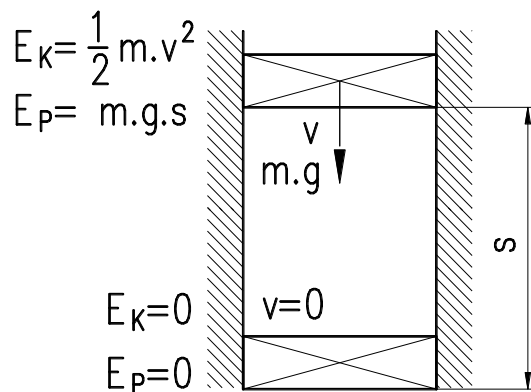
$$\frac{2 \cdot F \cdot s}{m} = v^2 - v_0^2$$

$$v^2 = \frac{2 \cdot F \cdot s}{m} + v_0^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{m} + v_0^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 10}{50} + 10^2} = 10,4 \text{ m/s}$$

Př.: Klec těžního stroje o hmotnosti $m = 6\,000 \text{ kg}$ sjíždí rychlostí $v = 6 \text{ m/s}$ rovnoměrným pohybem.

Po přetržení lana byla klec zastavena pojistným zařízením na dráze $s = 14 \text{ m}$. Jaká působila střední brzdicí síla?



$$E = E_p + E_k$$

$$F \cdot s = m \cdot g \cdot s + \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow$$

$$F = \frac{m \cdot g \cdot s + \frac{1}{2} m \cdot v^2}{s} = \frac{6000 \cdot 10 \cdot 14 + \frac{1}{2} \cdot 6000 \cdot 6^2}{14} = 67714 \text{ N}$$

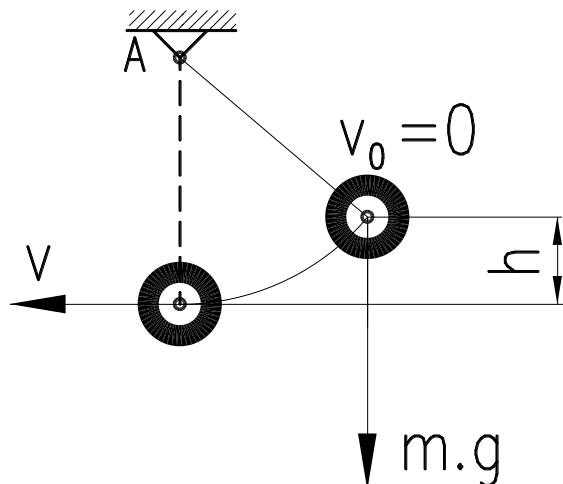
Př.: Střela o hmotnosti $m = 150 \text{ g}$ narazila na desku tlustou $s = 0,05 \text{ m}$ rychlostí $v_0 = 300 \text{ m/s}$. Po

proniknutí deskou se pohybovala rychlostí $v = 100 \text{ m/s}$. Jaký průměrný odpor deska kladla?

$$A = F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot (v_0^2 - v^2) \rightarrow$$

$$F = \frac{\frac{1}{2} m \cdot (v_0^2 - v^2)}{s} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,15 \cdot (300^2 - 100^2)}{0,05} = 120000 \text{ N} = 120 \text{ kN}$$

Př.: Jaká je rychlost matematického kyvadla v nejnižší poloze, bylo-li spuštěno z výšky $h = 200 \text{ mm}$, nepřehlídíme-li k odporům prostředí?



$$E_p = E_k$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,20} = 2 \text{ m/s}$$

Př.: Z vodorovně upevněné vzduchovky byla vystřelena střela o hmotnosti $m = 25 \text{ g} = 0,025 \text{ kg}$. Náboj byl vystřelen pomocí pružiny, která byla před vystřelením stlačena o vzdálenost $s = 120 \text{ mm} = 12 \text{ cm}$. Nenapnutá pružina má délku $l = 260 \text{ mm}$ a její tuhost (pružinová konstanta) je $c = 8,4 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1}$. Určete rychlost v vystřeleného náboje.

$$W = E_K$$

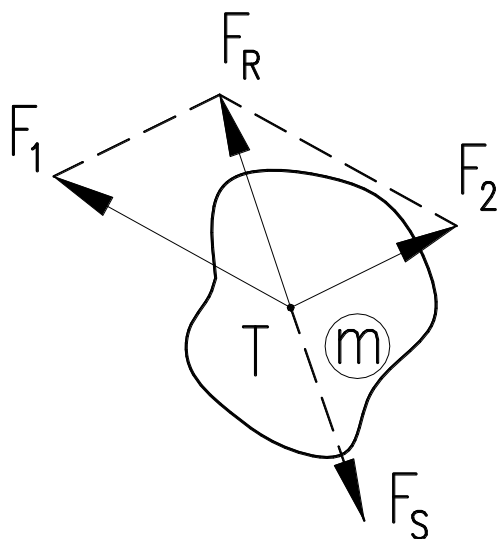
Pro pružinu platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F \cdot s &= \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot s}{2 \cdot m}} = \sqrt{\frac{F \cdot s}{m}} = \sqrt{\frac{s \cdot c \cdot s}{m}} = \\ &= \sqrt{\frac{12 \text{ cm} \cdot 8,4 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot 0,12 \text{ m}}{0,025 \text{ kg}}} = \sqrt{\frac{12 \text{ cm} \cdot 8,4 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot 0,12 \text{ m}}{0,025 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}} = 22 \text{ m/s} \end{aligned}$$

3.11 Dynamika těles

3.11.1 Dynamika posuvného pohybu

Dynamické úkoly převádíme v mechanice připojením setrvačných sil na statické úkoly a řešíme je z podmínek statické rovnováhy. Používáme přitom d'Alembertovu větu: „Při jakémkoli pohybu tělesa je rovnováha mezi silami vnějšími a opačně zrychlujícími či setrvačnými.“



Na těleso o hmotnosti m působí v těžišti vnější síly F_1 a F_2 . Výslednice těchto sil F_R uděluje tělesu zrychlení a .

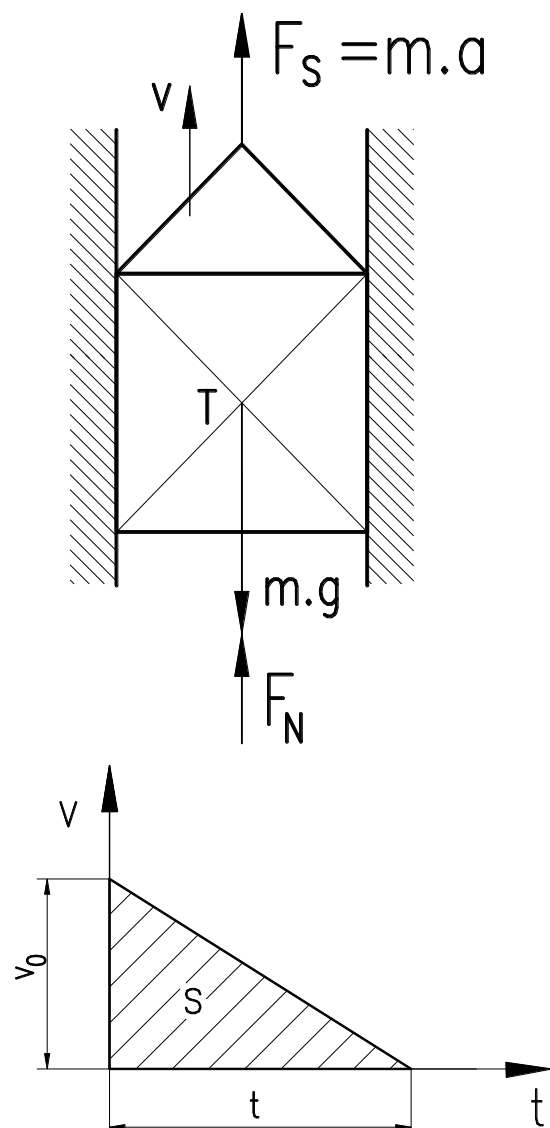
$$a = \frac{F_R}{m}$$

Při zrychleném pohybu částice hmoty m musíme překonávat odpor – setrvačnou sílu. Ta je stejně velká jako F_R , ale opačného smyslu. Dle d'Alemberta platí:

$$F_R - F_S = 0$$

$$F_R - m \cdot a = 0$$

Př.: Výtah jedoucí svisle vzhůru se zastaví s konstantním zpožděním z rychlosti $v_0 = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ na dráze $s = 2 \text{ m}$. Jakou reakci F_N (síla na dno) způsobí osoba o hmotnosti $m = 70 \text{ kg}$ podlaze klece?



$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t, v = 0, \rightarrow t = \frac{2 \cdot s}{v_0}$$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{v_0^2}{2 \cdot s} = \frac{2,5^2}{2 \cdot 2} = 1,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Setrvačná síla při pohybu rovnoměrně zrychleném působí vždy proti směru pohybu (brzdím a tím působím proti pohybu).

Při pohybu zpožděném působí ve směru pohybu.

Podmínka rovnováhy:

$$\sum F_i = 0$$

$$F_N - m \cdot g + m \cdot a = 0$$

$$F_N = m \cdot g - m \cdot a$$

$$F_N = m \cdot (g - a) = 70 \cdot (10 - 1,56) = 591 \text{ N}$$

3.11.2 Vázaný pohyb tělesa

Volný pohyb: těleso o hmotnosti m se nestýká za pohybu s jiným tělesem.

Vázaný pohyb: je omezený vazebními podmínkami (např. vlak na kolejích).

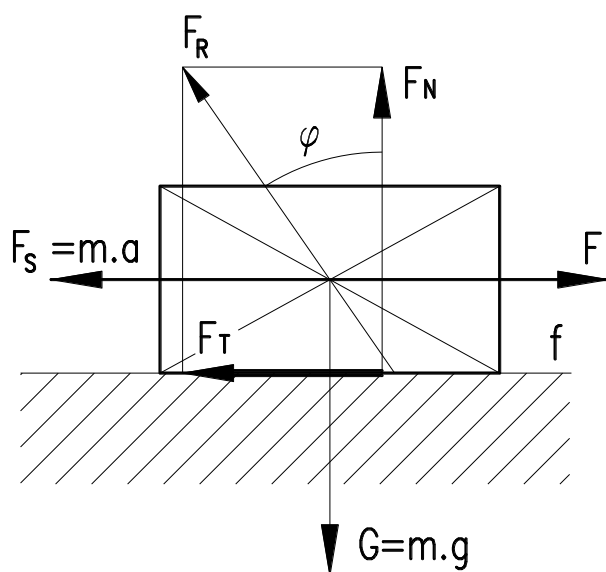
Je-li těleso vázáno na vedení, působí toto vedení na těleso vazebnou silou či reakcí vedení.

Při výpočtu vázaného pohybu uvolníme těleso tak, že odstraníme omezující podmínky a připojíme k akčním silám reakce, jakými na něj působila podpora nebo závěs. Složky reakcí kolmé na vedení F_N značíme F_N a tečné F_T .

3.11.3 Pohyb tělesa po vodorovné rovině

- Hnací síla rovnoběžná s rovinou

Pokud na těleso začne od určitého okamžiku působit síla $\mathbf{F}$ rovnoběžná s rovinou, způsobí tato síla změnu pohybu. Těleso uvolníme tak, že zaneseme do příkladu reakci podpory F_R , kterou můžeme rozdělit do normální a tečné složky. Přidáním setrvačné síly můžeme řešit případ podmínek statické rovnováhy.



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$F_T = F_N \cdot f = m \cdot g \cdot f$$

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t \Rightarrow v$$

$$\sum F_{ix} = F - m \cdot a - F_T = 0 \Rightarrow a = \frac{F - F_T}{m}$$

$$\sum F_{iy} = F_N - m \cdot g = 0$$

Z těchto podmínek můžu vypočítat F , v , a , s .

Př.: Určete velikost hnací síly F , kterou musíme působit na těleso o hmotnosti $m = 20 \text{ kg}$, jestliže těleso má na dráze $s = 2 \text{ m}$ dosáhnout rychlosti $v = 2,5 \text{ m/s}$ z klidu; $f = 0,1$. Hnací síla působí rovnoběžně s vodorovnou rovinou.

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t \rightarrow t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 2}{2,5} = 1,6 \text{ s}$$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{2,5}{1,6} = 1,56 \text{ m/s}^2$$

$$\sum F_{iy} = F_N - m \cdot g = 0 \rightarrow F_N = m \cdot g$$

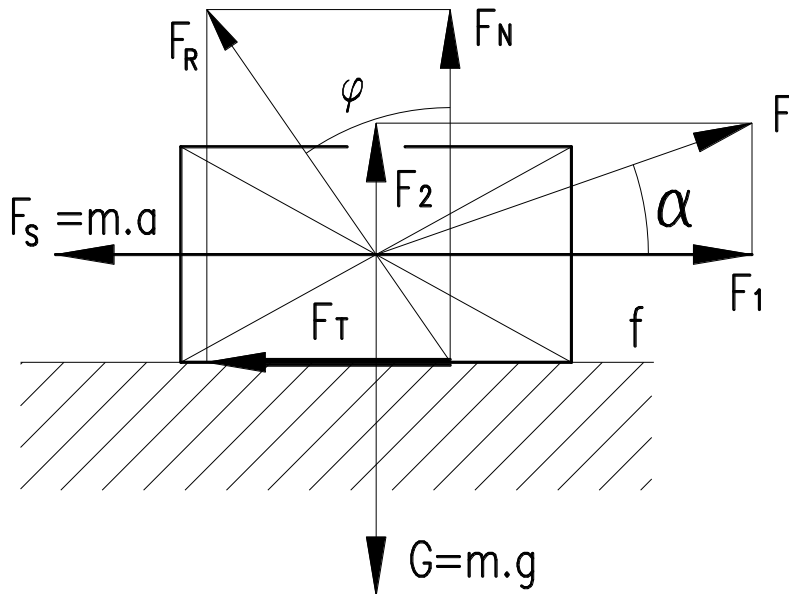
$$F_T = F_N \cdot f = m \cdot g \cdot f$$

$$\sum F_{ix} = F - m \cdot a - F_T = 0 \rightarrow F = m \cdot a + F_T = m \cdot a + m \cdot g \cdot f =$$

$$= m \cdot (a + g \cdot f) = 20 \cdot (1,56 + 9,81 \cdot 0,1) = 51 \text{ N}$$

- **Hnací síla v obecném směru**

Tuto sílu rozložíme do dvou složek, z nichž jedna je kolmá na vedení a druhá rovnoběžná s vedením. Další řešení je stejné.



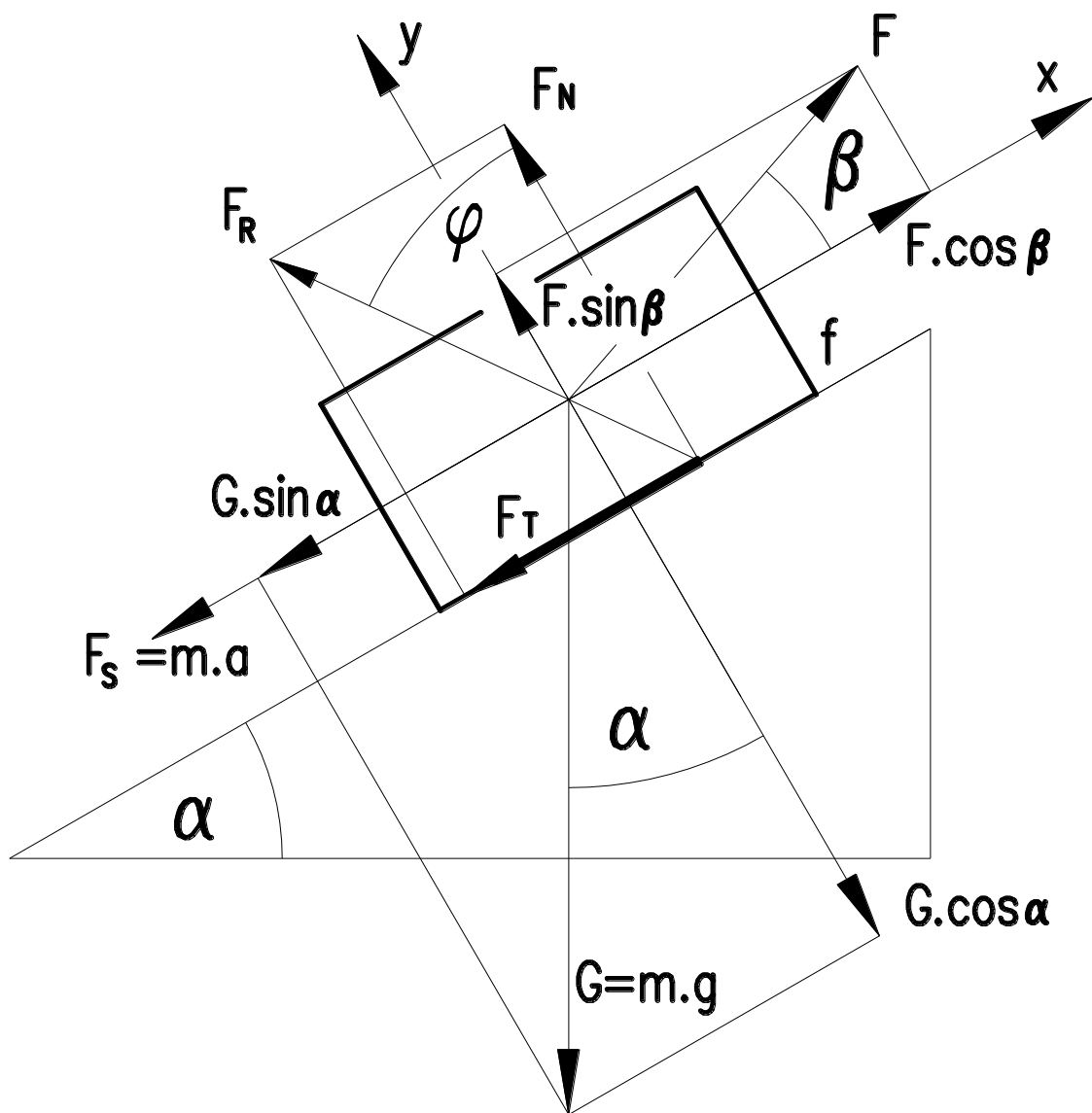
$$\sum F_{ix} = F_1 - m \cdot a - F_T = 0$$

$$\sum F_{iy} = F_N + F_2 - G = 0$$

- **Pohyb tělesa po nakloněné rovině**

Postup řešení je stejný jako v předchozích případech. Zavedením reakce uvolníme těleso, přidáme setrvačnou sílu a případ řešíme z podmínek statické rovnováhy.

Př.: Na nakloněné rovině s úhlem $\alpha = 8^\circ$ se pohybuje těleso o hmotnosti $m = 50 \text{ kg}$ a působí na něj síla $F = 80 \text{ N}$ pod úhlem $\beta = 12^\circ$. Počáteční rychlost tělesa $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Určete jakou rychlostí se bude pohybovat těleso po nakloněné rovině po 5 sekundách silového působení. $f = 0,08$.



$$\sum F_{ix} = F \cdot \cos \beta - F_s - F_T - G \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = F_N + F \cdot \sin \beta - G \cdot \cos \alpha = 0$$

$$F_N + F \cdot \sin \beta - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_N = m \cdot g \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \beta$$

$$F \cdot \cos \beta - m \cdot a - F_N \cdot f - m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0$$

$$F \cdot \cos \beta - m \cdot a - m \cdot g \cdot f \cdot \cos \alpha + F \cdot f \cdot \sin \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow$$

$$a = \frac{F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot f \cdot \cos \alpha + F \cdot f \cdot \sin \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m} =$$

$$= \frac{F \cdot (\cos \beta + f \cdot \sin \beta) - m \cdot g \cdot (f \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)}{m} =$$

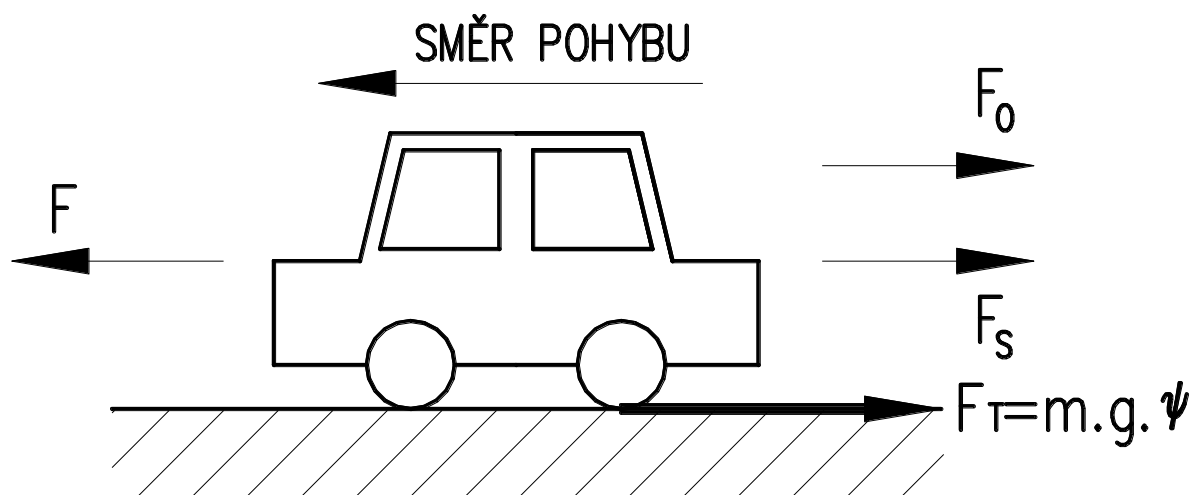
$$= \frac{80 \cdot (\cos 12^\circ + 0,08 \cdot \sin 12^\circ) - 50 \cdot 9,81 \cdot (0,08 \cdot \cos 8^\circ + \sin 8^\circ)}{50} =$$

$$= a = -0,551 \text{ m/s}^2 \rightarrow \text{dochází ke zpomalování tělesa}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} \rightarrow v = a \cdot t + v_0 = -0,551 \cdot 5 + 10 = 7,25 \text{ m/s}$$

3.11.4 Pohyb rychlého dopravního prostředku

Při pohybu dopravního prostředku po rovné vodorovné vozovce musí vozidlo překonávat odpor, který se skládá z celkového odporu vozidla a odporu prostředí. Celkový odpor vozidla F_T (třecí síla) se skládá z čepového tření a valivého odporu.



Třecí síla: $F_T = F_N \cdot \psi = G \cdot \psi = m \cdot g \cdot \psi$

Trakční součinitel: $\Psi = \frac{e + f_{\epsilon} \cdot r_{\epsilon}}{R}$

e – rameno valivého odporu;

f_{ϵ} – součinitel čepového tření;

r_{ϵ} – poloměr čepu;

R – poloměr kola.

Odpor prostředí je dán vztahem:

$$F_0 = \kappa \cdot S \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2}$$

κ – odporový součinitel (0,8 ÷ 1,5 [–]);

ρ – měrná hmotnost prostředí [$kg \cdot m^{-3}$];

$$K = \frac{\kappa \cdot \rho}{2}$$

S – největší průřez vozidla kolmý k pohybu [m^2];

$$F_0 = K \cdot S \cdot v^2$$

v – rychlost vozidla [$m \cdot s^{-1}$];

$$\rho_{vzduchu} = 1,25 \frac{kg}{m^3}$$

K – tvarový součinitel [0,09 (proudnicový tvar) ÷ 0,5 (klasický tvar nákladáku)].

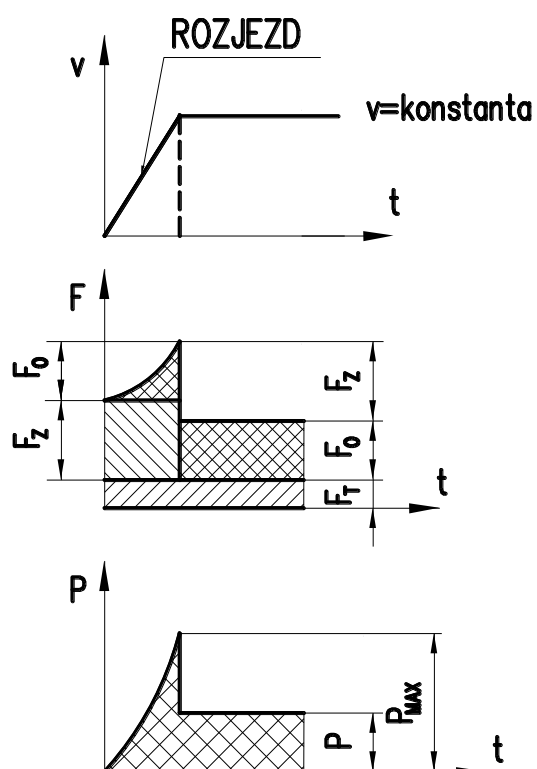
Při řešení pohybu rychlých dopravních prostředků vycházíme ze vztahu:

$$F - F_S - F_0 - F_T = 0$$

$$F_0 = \kappa \cdot S \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2}$$

$$F_T = m \cdot g \cdot \psi$$

Grafické znázornění rychlosti, hnací síly a výkonu motoru.



Při rozjíždění musí hnací síla překonávat **odpor tření F_T** a **odpor prostředí F_0** a vozidlo musí zrychlovat. Maximální rychlosti odpovídá hnací síla $F_{\max} = F_T + F_0 + F_z$ (F_z – zrychlující síla)

Za plné jízdy odpadá zrychlující síla F_z a hnací síla pak je: $F = F_T + F_{0\max}$

$$P = F \cdot v$$

$$P_{\max} = F_{\max} \cdot v_{\max}$$

po rozběhnutí klesne výkon na

$$P = (F_T + F_{0\max}) \cdot v_{\max}$$

Př.: Automobil o hmotnosti $m = 1\,500\text{ kg}$ se rozjede za $t = 10\text{ s}$ rovnoměrně zrychleně na rychlost $v = 72\text{ km/h} = 20\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jaká je jeho zrychlující a hnací síla motoru F_h při rozjíždění, největší hnací síla $F_{\max}$ a největší výkon motoru $P_{\max}$, hnací síla a výkon při plné jízdě? $K = 0,3$; $S = 3\text{ m}^3$; $\Psi = 0,01$.

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{20 - 0}{10} = 2\text{ m/s}^2$$

$$\text{Zrychlující síla: } F_z = m \cdot a = 1500 \cdot 2 = 3000\text{ N}$$

$$\text{Třecí síla: } F_T = m \cdot g \cdot \Psi = 1500 \cdot 9,81 \cdot 0,01 \doteq 147\text{ N}$$

Hnací síla F_h na počátku rozjíždění (zrychlující + třecí):

$$F_h = F_z + F_T = 3000 + 147 = 3147\text{ N}$$

$$\text{Odpor vzduchu na konci rozjíždění: } F_0 = K \cdot S \cdot v^2 = 0,3 \cdot 3 \cdot 20^2 = 360\text{ N}$$

Největší hnací síla na konci rozjíždění:

$$F_{\max} = F_z + F_0 + F_T = 3000 + 360 + 147 = 3507\text{ N}$$

$$\text{Největší výkon: } P_{\max} = F_{\max} \cdot v_{\max} = 3507 \cdot 20 = 70140\text{ W} = 70,1\text{ kW}$$

$$\text{Hnací síla při plné jízdě: } F_h = F_T + F_0 = 147 + 360 = 507\text{ N}$$

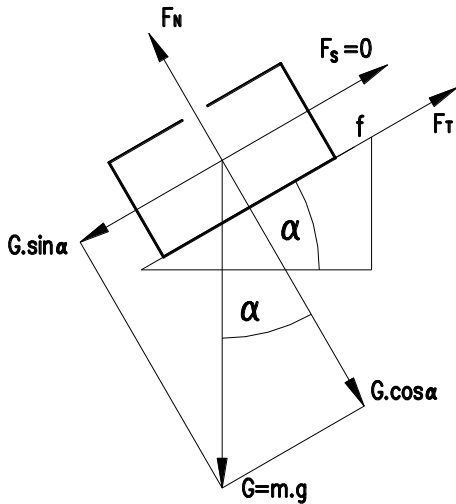
$$\text{Výkon při plné jízdě: } P = F_h \cdot v_{\max} = 507 \cdot 20 = 10140\text{ W} = 10,1\text{ kW}$$

Př.: V ocelovém žlabu se dopravuje uhlí. Jaký musí být:

a) nejmenší úhel sklonu, má-li uhlí žlabem rovnoměrně klouzat. Dáno: $f = 0,24$.

b) zvětšíme-li úhel sklonu žlabu na $\alpha = 30^\circ$, s jakým zrychlením uhlí sjíždí a jaké dosáhne rychlosti na konci žlabu o délce 8 m?

a)



$$\sum F_{iy} = 0$$

$$-F_N + G \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_N = G \cdot \cos \alpha$$

$$F_S = 0 \text{ (uhlí nemá propadávat, má sjíždět)}$$

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$F_T = F_N \cdot f$$

$$-F_T + G \cdot \sin \alpha = 0$$

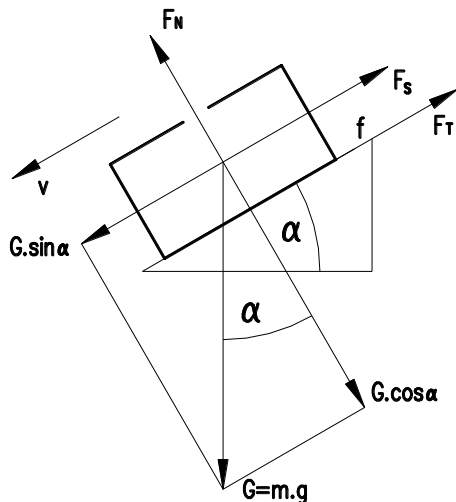
$$-F_N \cdot f + G \cdot \sin \alpha = 0$$

$$-G \cdot \cos \alpha \cdot f + G \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sin \alpha = f \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = f = 0,24 \rightarrow \alpha = 13^\circ 29'$$

b)



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$G \cdot \sin \alpha - F_T - F_S = 0$$

$$G \cdot \sin \alpha - F_N \cdot f - F_S = 0$$

$$G \cdot \sin \alpha - F_N \cdot f - m \cdot a = 0$$

$$G \cdot \sin \alpha - G \cdot f \cdot \cos \alpha - m \cdot a = 0 \rightarrow m \cdot a =$$

$$= G \cdot \sin \alpha - f \cdot G \cdot \cos \alpha \rightarrow$$

$$a = \frac{G \cdot \sin \alpha - G \cdot f \cdot \cos \alpha}{m} =$$

$$= \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha - m \cdot g \cdot f \cdot \cos \alpha}{m} = \frac{m \cdot g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)}{m} =$$

$$= g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) =$$

$$= 9,81 \cdot (\sin 30^\circ - 0,24 \cdot \cos 30^\circ) = 2,87 \text{ m/s}^2 = a$$

$$a = \frac{v}{t} \rightarrow v = a \cdot t$$

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8}{2,87}} = 2,36 \text{ s}$$

$$v = a \cdot t = 2,87 \cdot 2,36 = 6,8 \text{ m/s}$$

3.11.5 Pohybová energie pro translační pohyb

Pohybová energie hmotného bodu: $\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v^2$

U translačního pohybu se každý hmotný bod tělesa pohybuje stejnou rychlostí v .

Pohybová energie celého tělesa je dána součtem pohybových energií jednotlivých bodů, a proto platí, že:

$$\Delta E = \sum \Delta E_i = \sum \frac{1}{2} \cdot \Delta m_i \cdot v^2 = \frac{v^2}{2} \cdot \sum \Delta m_i = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Stejně jako u hmotného bodu platí, že práce zrychlující síly se projevuje změnou jeho pohybové energie. Platí to i pro tělesa.

Práce = Energie

$W = E$

$$F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v^2 - v_0^2)$$

Př.: Vlak o hmotnosti $m = 2 \cdot 10^5 \text{ kg}$ se rozjíždí rovnoměrně zrychleně na rychlost $v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$ na dráze $s = 600 \text{ m}$. Určete:

- a) zrychlení při rozjíždění;
- b) zrychlující sílu lokomotivy;
- c) energii pohybu vlaku na konci rozjíždění ;
- d) velikost odporu, který působí na vlak, jestliže při vykolejení se zastaví na dráze $s = 30 \text{ m}$.

$$\text{a) } s = \frac{1}{2} v \cdot t \rightarrow t = \frac{2 \cdot s}{v}$$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2 \cdot s} = \frac{20^2}{2 \cdot 600} = 0,333 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b) } F_z = m \cdot a = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,3333 = 66\,666 \text{ N}$$

$$\text{c) } E_K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^5 \cdot 20^2 = 40\,000\,000 \text{ J} = 40 \text{ MJ}$$

$$\text{d) } F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v^2 - v_0^2), \quad v_0 = 0 \rightarrow F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$F = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot s} = \frac{200\,000 \cdot 20^2}{2 \cdot 30} = 1333\,333 \text{ N} = 1333 \text{ kN}$$

3.11.6 Dynamika otáčivého pohybu

3.11.6.1 Momenty setrvačnosti těles

V **pružnosti a pevnosti** jsme označovali výraz $\Delta S \cdot y^2 = \Delta J$ jako elementární **kvadratický moment** průřezu.

V **dynamice** součin elementární hodnoty a čtverce vzdálenosti od uvažované osy $\Delta m \cdot r^2 = \Delta I$ nazýváme elementárním **momentem setrvačnosti**.

Celkový moment setrvačnosti k dané ose:

$$I = \sum \Delta I_i = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots [kg \cdot m^2]$$

3.11.6.2 Základní pojmy

Moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm se značí I_0

Redukovaná hmotnost:

V technické praxi často potřebujeme převést (redukovat) hmotu otáčejícího se tělesa s momentem setrvačnosti I_0 do jediného bodu předepsané vzdálenosti r od osy otáčení tak, aby moment setrvačnosti tohoto bodu byl stejný jako moment setrvačnosti celého tělesa ke stejné ose.

Redukovanou hmotnost m_r pak určíme ze vztahu:

$$I_0 = m_r \cdot r^2$$

$$m_r = \frac{I_0}{r^2}$$

Tímto způsobem redukuje se např. hmotu setrvačníku do čepu kliky.

Poloměr setrvačnosti

Se zřetelem na zjednodušení vztahů závislých na momentu setrvačnosti se zavádí pojem **poloměr setrvačnosti** a značí se i . Platí:

$$I_0 = m \cdot i^2 \rightarrow i = \sqrt{\frac{I_0}{m}} [m]$$

I_0 – moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm.

Setrvačný moment

Místo momentu setrvačnosti I se při výpočtech setrvačníků a rotačních částí strojů používá setrvačný moment ($m \cdot D^2$). Bývá uváděn v katalozích elektrických strojů. Podle setrvačného momentu posuzujeme setrvačnost otáčejícího se tělesa.

m – hmotnost celého tělesa;

D – průměr setrvačnosti.

$$D = 2 \cdot i = 2 \cdot \sqrt{\frac{I_0}{m}}$$

$$I_0 = m \cdot i^2$$

i – poloměr setrvačnosti, I_0 – moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm.

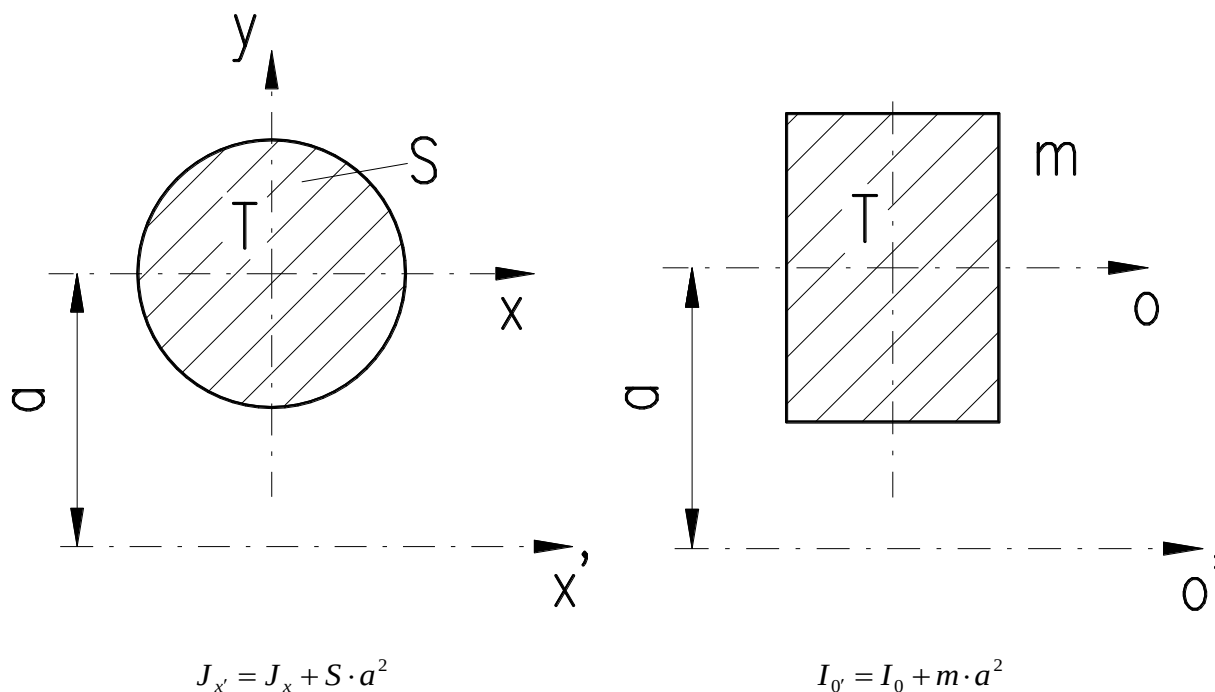
Mezi momentem setrvačnosti a setrvačným momentem platí vztah:

$$m \cdot D^2 = m \cdot (2 \cdot i)^2 = 4 \cdot \underbrace{m \cdot i^2}_{I_0} = 4 \cdot I_0 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

Setrvačný moment $m \cdot D^2$ je 4 násobkem momentu setrvačnosti I_0 .

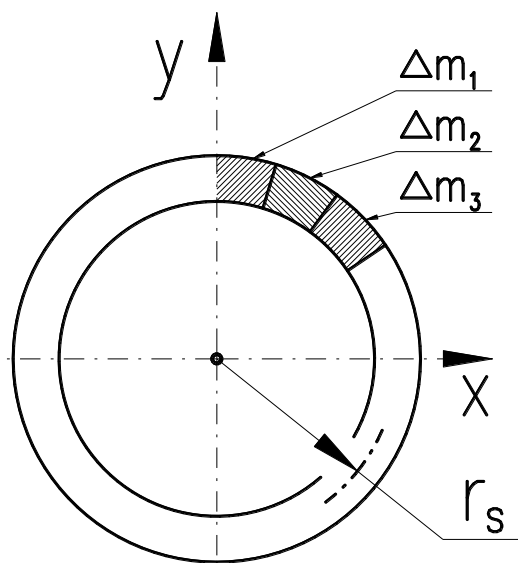
3.11.6.3 Momenty setrvačnosti k osám rovnoběžným s osou těžiště

Stejně jako u kvadratického momentu i zde platí Steinerova věta.



3.11.6.4 Momenty setrvačnosti jednoduchých těles

- Moment setrvačnosti tenkého věnce



$$\Delta I_1 = \Delta m_1 r_s^2$$

$$\Delta I_2 = \Delta m_2 r_s^2$$

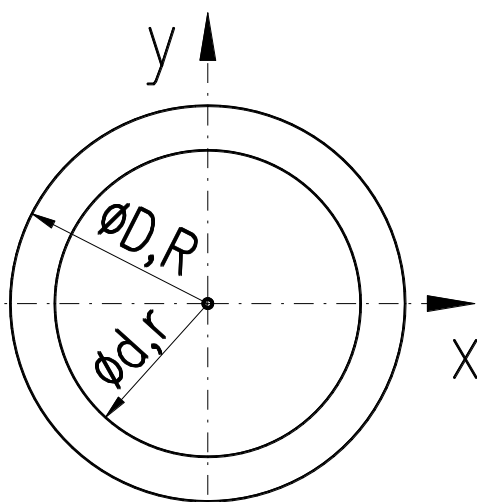
$$I_0 = \sum \Delta I_i = \sum \Delta m_i \cdot r_s^2 = r_s^2 \sum \Delta m_i$$

$$\sum \Delta m_i = m \cdot r_s^2 = I_0$$

r_s – střední poloměr věnce;

m – hmotnost celého věnce.

Př.: Určete moment setrvačnosti ocelové trubky $D = 420 \text{ mm}$, $d = 380 \text{ mm}$, $l = 100 \text{ mm}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$.



$$I_0 = m \cdot r_s^2$$

$$m = V \cdot \rho = \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} \right) \cdot l \cdot \rho = \frac{\pi}{4} \cdot l \cdot \rho \cdot (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} \cdot 0,1 \cdot 7850 \cdot (0,42^2 - 0,38^2) = 19,73 \text{ kg}$$

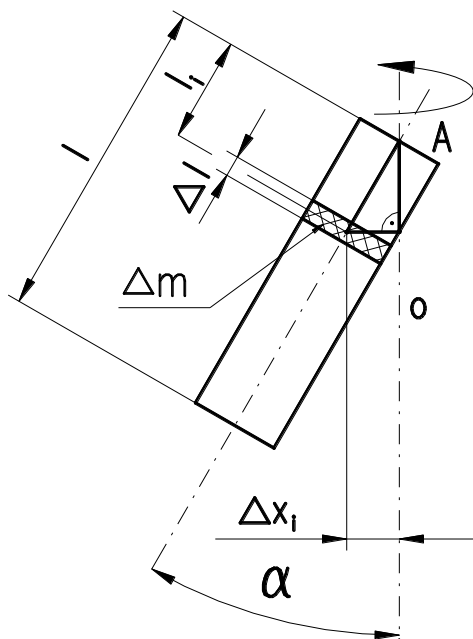
$$r_s = \frac{R+r}{2} = \frac{\frac{0,42}{2} + \frac{0,38}{2}}{2} = \frac{0,21 + 0,19}{2} = 0,2 \text{ m}$$

$$I_0 = m \cdot r_s^2 = 19,73 \cdot 0,2^2 = 0,789 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- Moment setrvačnosti tyče k ose procházející koncovým bodem tyče

Předpoklad: stejnorodá tyč.

Postup řešení je stejný jako v předcházejícím případě. Tyč rozdělíme na jednotlivé elementy hmoty, určíme jejich moment setrvačnosti a celkový moment setrvačnosti je dán součtem jednotlivých elementárních momentů setrvačnosti.



Element tyče má hmotnost: $\Delta m = \frac{m}{l} \cdot \Delta l$

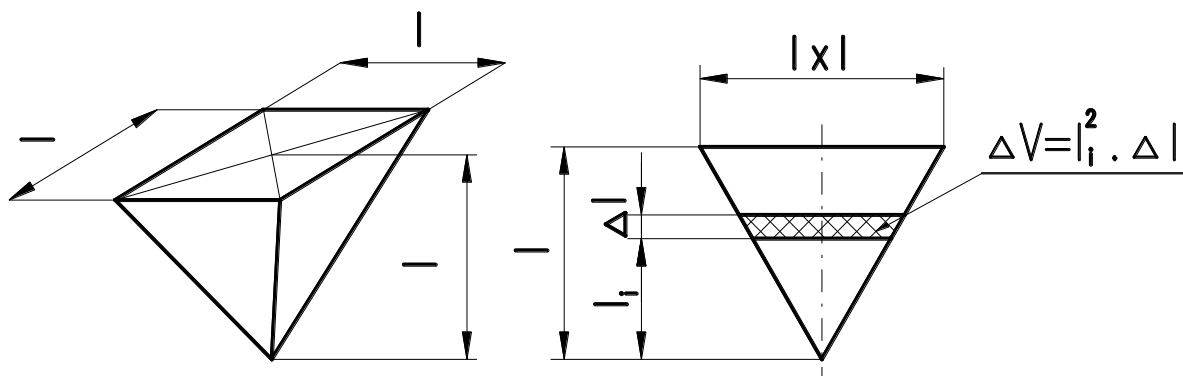
Moment setrvačnosti daného elementu:

$$\Delta I_i = \Delta m \cdot x_i^2 = \Delta m \cdot (l_i \cdot \sin \alpha)^2 = \underbrace{\frac{m}{l} \cdot \Delta l}_{\Delta m} \cdot l_i^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

Moment setrvačnosti celé tyče:

$$I = \sum \Delta I_i = \frac{m}{l} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sum_0^l l_i^2 \cdot \Delta l$$

Hodnotu výrazu $\sum_0^l l_i^2 \cdot \Delta l$ si můžeme určit následovně. U pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou o straně l a výšce l v libovolné vzdálenosti od vrcholu je výsledkem řezu rovnoběžného s podstavou čtverce o straně l_i . Výraz $l_i^2 \cdot \Delta l$ představuje element objemu tohoto jehlanu, proto výraz $\sum_0^l l_i^2 \cdot \Delta l$ představuje objem celého jehlanu.

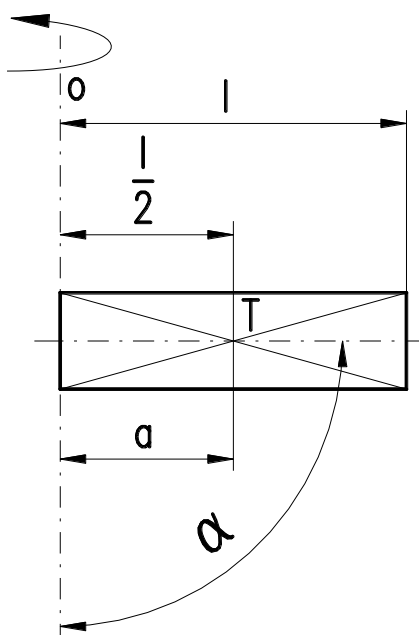


$$l_i^2 \cdot \Delta l_i = \Delta V_i$$

$$\sum_0^l l_i^2 \cdot \Delta l_i = \frac{l^3}{3} = V$$

Moment setrvačnosti tyče v obecné poloze: $I = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{3} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{m \cdot l^2}{3} \cdot \sin^2 \alpha$

Pro tyč s osou souměrnosti kolmou na osu rotace:

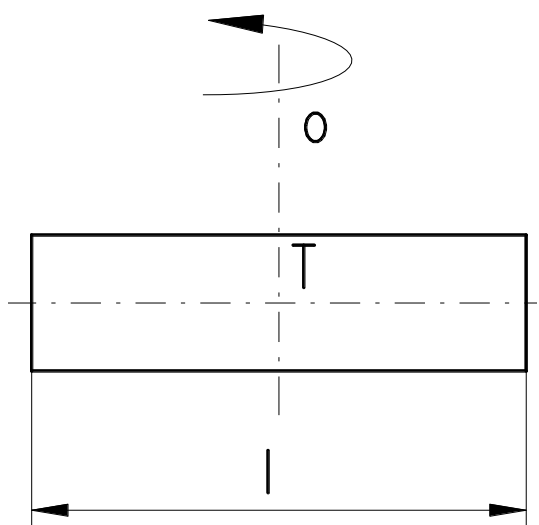


Moment setrvačnosti:

($\sin 90^\circ = 1$)

$$I = \frac{m \cdot l^2}{3}$$

Moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm určíme podle Steinerovy věty:

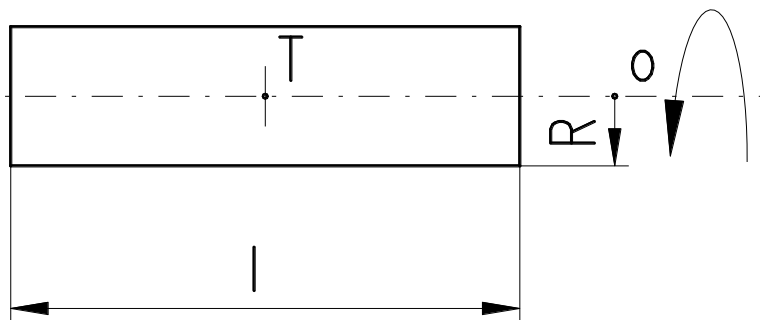


$$I = I_0 + m \cdot a^2$$

$$a = \frac{l}{2}$$

$$I_0 = I - m \cdot a^2 = \frac{m \cdot l^2}{3} - \frac{m \cdot l^2}{4} = \frac{m \cdot l^2}{12}$$

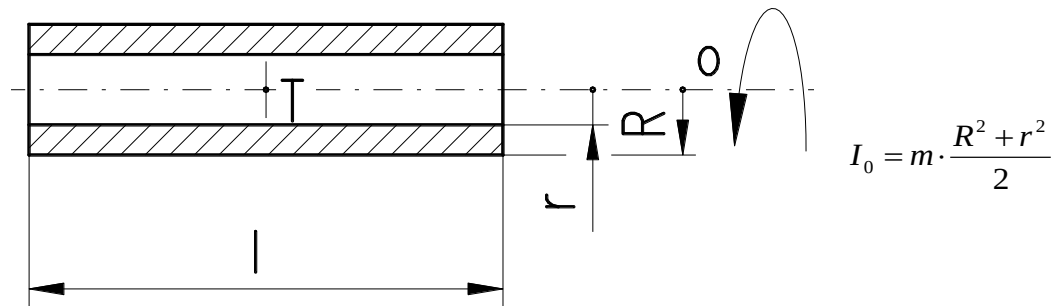
Moment setrvačnosti válce k ose souměrnosti:



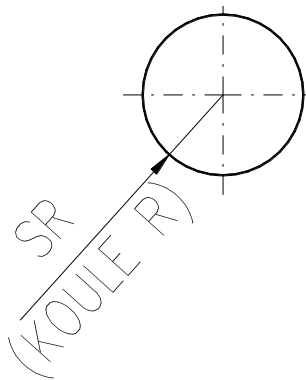
$$I_0 = \frac{m \cdot R^2}{2}$$

R – poloměr válce

Moment setrvačnosti dutého válce k ose souměrnosti:

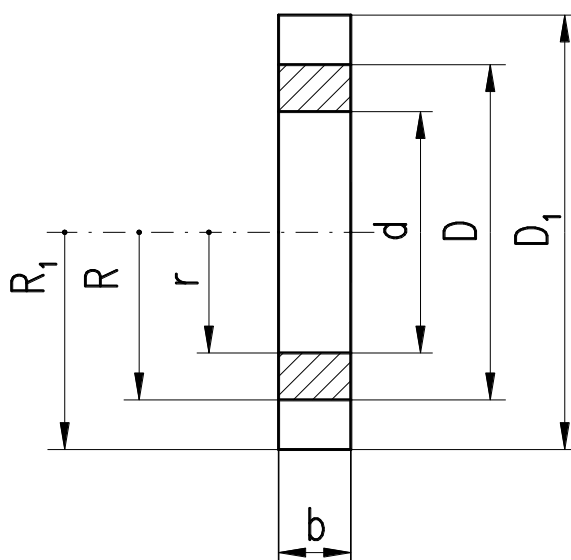


Moment setrvačnosti koule:



Př.: U kotouče je $D = 1,25 \cdot d$ ($R = 1,25 \cdot r$). Jak musíme změnit průměr D na $D_1 = ?$ při stejné šířce kotouče b a stejném materiálu, aby se moment setrvačnosti ztrojnásobil?

Poznámka: $(a^2 - b^2) = (a + b) \cdot (a - b)$.



$$\begin{aligned} I_0 &= m \cdot \frac{R^2 + r^2}{2} = \rho \cdot V \cdot \frac{R^2 + r^2}{2} = \\ &= \rho \cdot \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot b \cdot (R^2 + r^2)}{2} = \rho \cdot \frac{\pi \cdot b \cdot (R^4 - r^4)}{2} = \\ &= \frac{\rho \cdot \pi \cdot b}{2} \cdot ((1,25r)^4 - r^4) = \frac{\rho \cdot \pi \cdot b}{2} \cdot 1,441 \cdot r^4 = I_0 \end{aligned}$$

$$I_0' = 3 \cdot I_0$$

$$3 \cdot \frac{\rho \cdot \pi \cdot b}{2} \cdot 1,441 \cdot r^4 = m \cdot \frac{R_1^2 + r^2}{2}$$

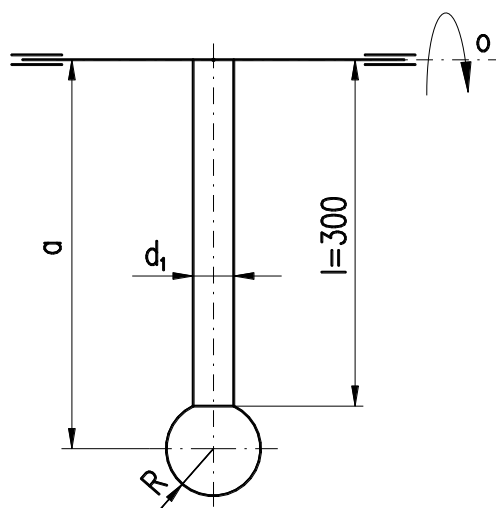
$$3 \cdot \frac{\rho \cdot \pi \cdot b}{2} \cdot 1,441 \cdot r^4 = \frac{\rho \cdot \pi \cdot b}{2} \cdot (R_1^4 - r^4)$$

$$3 \cdot 1,441 \cdot r^4 = R_1^4 - r^4$$

$$R_1^4 = (3 \cdot 1,441 + 1) \cdot r^4$$

$$R_1 = \sqrt[4]{(3 \cdot 1,441 + 1) \cdot r^4} = 1,52r$$

Př.: Ocelová tyč $l = 300 \text{ mm}$, $d_1 = 20 \text{ mm}$ rotuje kolem osy o . K tyči je připevněna koule
o $R = 60 \text{ mm}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$. Určete moment setrvačnosti k ose o .



$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{m_1 \cdot l^2}{3}$$

$$I_2 = \frac{2}{5} \cdot m_2 \cdot R^2 + m_2 \cdot a^2$$

Steinerova věta

$$m_1 = V_1 \cdot \rho = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot l \cdot \rho = \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} \cdot 0,3 \cdot 7800 = 0,74 \text{ kg}$$

$$m_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,06^3 \cdot 7800 = 7,06 \text{ kg}$$

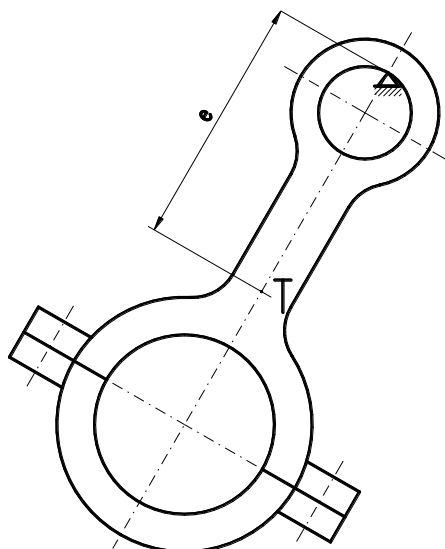
$$I_1 = \frac{m_1 \cdot l^2}{3} = \frac{0,74 \cdot 0,3^2}{3} = 0,022 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = \frac{2}{5} \cdot m_2 \cdot R^2 + m_2 \cdot a^2 = \frac{2}{5} \cdot 7,06 \cdot 0,06^2 + 7,06 \cdot 0,36^2 = 0,925 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I = I_1 + I_2 = 0,022 + 0,925 = 0,947 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.11.6.5 Zjišťování momentu setrvačnosti pokusem

Moment setrvačnosti složitých těles se v technické praxi mnohdy určuje experimentálně. Nejčastěji se používá způsob kývání – měřené těleso se zavěsí na břit, rozkývá se, měříme dobu většího počtu kyvů (10 až 20).



Moment setrvačnosti

$$I = m \cdot g \cdot e \cdot \frac{t^2}{\pi^2}$$

m – hmotnost součásti;

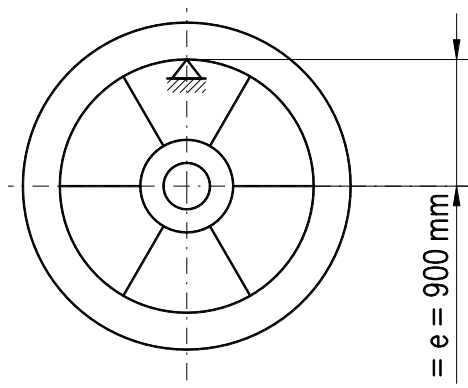
e – vzdálenost těžiště od osy kyvu;

t – čas 1 kyvu.

Moment setrvačnosti k ose procházející
těžištěm:

$$I_0 = I - m \cdot e^2$$

Př.: Určete moment setrvačnosti setrvačníku o hmotnosti $m = 850 \text{ kg}$, je-li vzdálenost těžiště setrvačníku od závěsu $l = 900 \text{ mm}$ a doba deseti kyvů je 11 s .

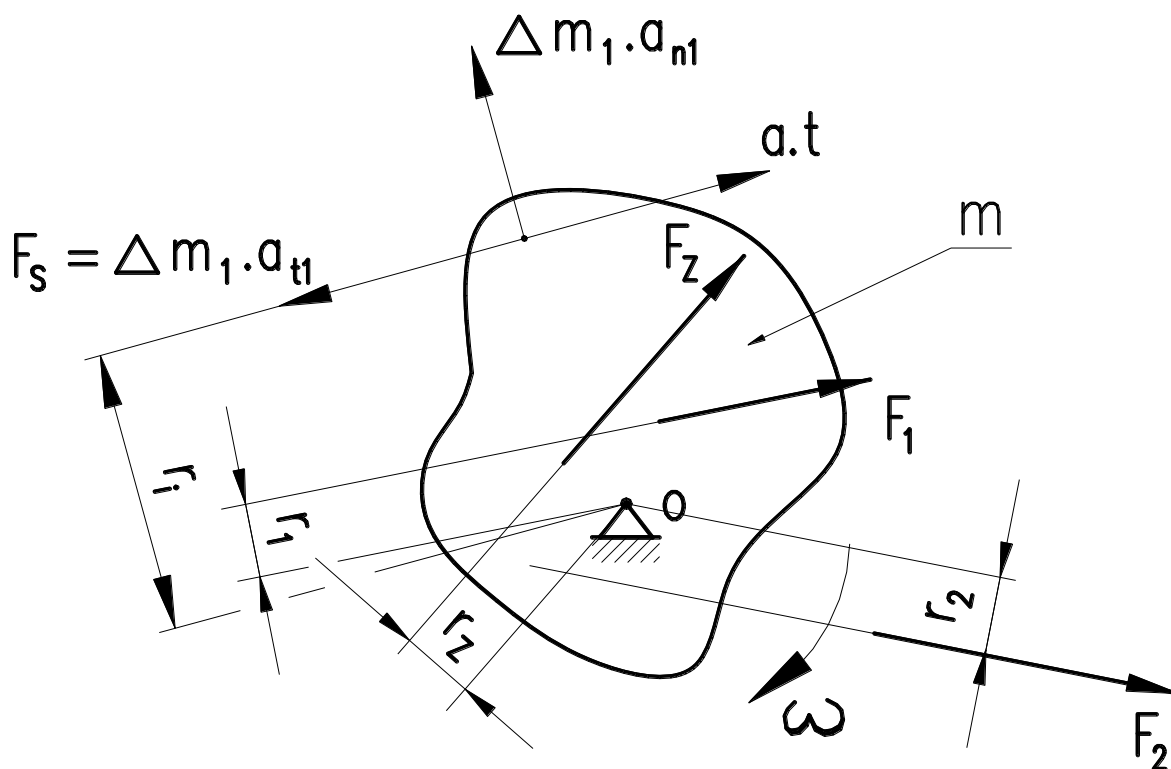


$$t = \frac{11}{10} = 1,1 \text{ s}$$

$$I = m \cdot g \cdot e \cdot \frac{t^2}{\pi^2} = 850 \cdot 9,81 \cdot 0,9 \cdot \frac{1,1^2}{\pi^2} = 920 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.11.7 Základní rovnice dynamiky pro rotační pohyb

Pokud na těleso, které se otáčí kolem stálé osy otáčení, působí více než 1 síla, můžeme účinek těchto sil nahradit silou jedinou – výslednicí těchto sil (**silou zrychlující F_z**).



$$M = F_z \cdot r_z = F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 + \dots = \sum F_i \cdot r_i$$

Výslednici vnějších sil F_z určíme z podmínek statické rovnováhy:

$$F_z = \frac{\sum F_i \cdot r_i}{r_z}$$

Podobně jako u translačního (posuvného) pohybu převedeme dynamickou úlohu na statickou, připojíme-li k danému hmotnému bodu setrvačné síly. Tím nastává rovnováha při otáčení tělesa a příklad řešíme z podmínky statické rovnováhy.

Platí, že algebraický součet momentů vnějších sil a sil setrvačných k ose otáčení se rovná 0.

$$\sum F_i \cdot r_i + \left(- \sum \Delta m_i \cdot a_{ti} \cdot r_i \right) = 0$$

Součet momentů vnějších sil + součet momentů setrvačných sil = 0

$$a_t = \varepsilon \cdot r \quad (\varepsilon - \text{úhlové zrychlení})$$

$$\sum F_i \cdot r_i - \sum \Delta m_i \cdot \varepsilon \cdot r_i^2 = F_z \cdot r_z - \varepsilon \cdot \sum \overbrace{\Delta m_i \cdot r_i^2}^I = F_z \cdot r_z - \varepsilon \cdot I = 0$$

$$M - \varepsilon \cdot I = 0$$

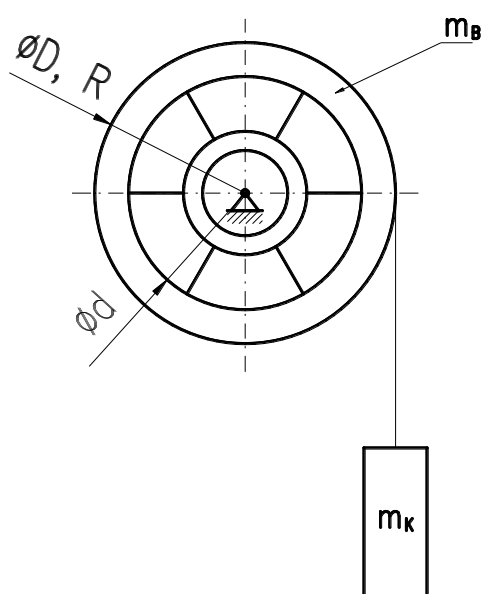
$$M = \varepsilon \cdot I$$

I – moment setrvačnosti.

Točivý moment vnější síly k ose otáčení je roven součinu momentu setrvačnosti tělesa k téže ose a úhlového zrychlení.

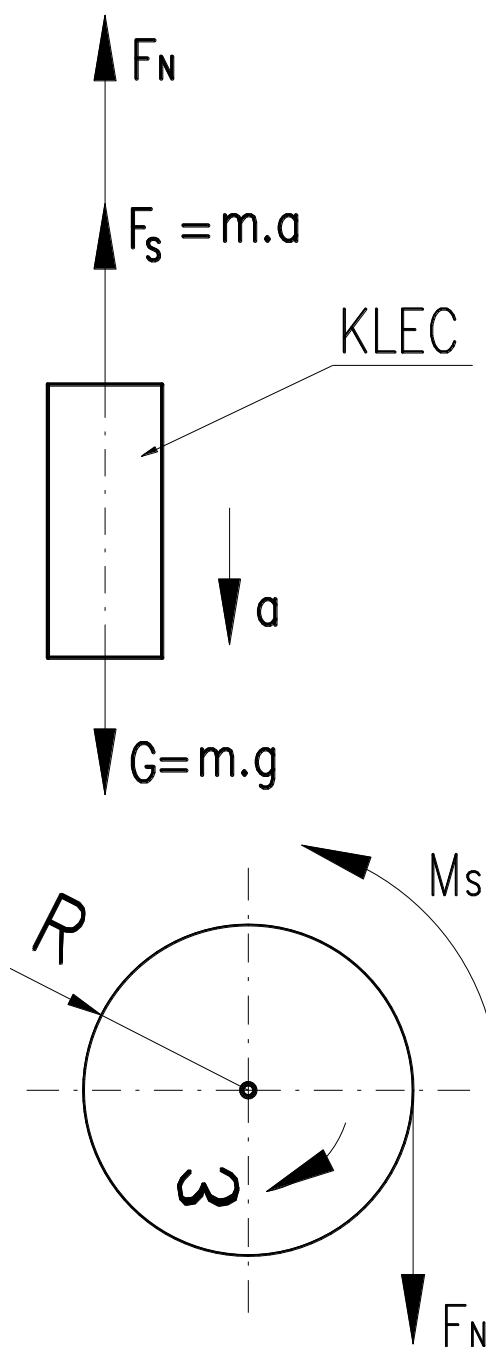
Př.: Buben výtahu o hmotnosti $m_b = 450 \text{ kg}$ má vnější průměr $D = 1\,200 \text{ mm}$, vnitřní průměr $d = 1000 \text{ mm}$. Na bubnu je navinuto lano, ke kterému je připevněna klec o hmotnosti $m_k = 620 \text{ kg}$. Po odbrzdění začne klec volně sjíždět. Určete:

- otáčky, které buben vykoná za 4 s;
- jaká osová síla F_N vznikne v laně;
- do jaké hloubky klec klesne.



Řešení: Máme-li určit pohyb soustavy hmotných těles, postupujeme tak, že tělesa uvolníme a určíme jejich pohyb samostatně.

- Klec – koná pohyb posuvný.
- Buben – koná pohyb rotační.



a)

$$\sum F_i = 0$$

$$-G + F_s + F_N = 0$$

$$-m_K \cdot g + m_K \cdot a + F_N = 0$$

Síla v laně:

$$F_N = m_K \cdot (g - a)$$

b)

$$\sum M_i = 0$$

$$M_s = \varepsilon \cdot I$$

$$F_N \cdot R - \varepsilon \cdot I = 0 \rightarrow F_N = \frac{\varepsilon \cdot I}{R}$$

Zrychlení klece je totožné s tečným zrychlením bubnu.

$$a = a_t = \varepsilon \cdot R$$

$$m_K \cdot g - m_K \cdot a - F_N = 0$$

$$m_K \cdot g - m_K \cdot \overbrace{\varepsilon \cdot R}^a - \overbrace{\varepsilon \cdot \frac{I}{R}}^{F_N} = 0 \quad / \times R$$

(obě strany rovnice násobíme R)

$$m_K \cdot g \cdot R - m_K \cdot \varepsilon \cdot R^2 - \varepsilon \cdot I = 0$$

$$m_K \cdot g \cdot R - \varepsilon \cdot (m_K \cdot R^2 + I) = 0$$

Úhlové zrychlení:

$$\varepsilon = \frac{m_K \cdot g \cdot R}{m_K \cdot R^2 + I} = \frac{m_K \cdot g \cdot R}{m_K \cdot R^2 + m_b \cdot \frac{R^2 + r^2}{2}} = \frac{620 \cdot 9,81 \cdot 0,6}{620 \cdot 0,6^2 + 450 \cdot \frac{0,6^2 + 0,5^2}{2}} = 10,1 \text{ rad/s}^2$$

Síla v laně:

$$F_N = m_K \cdot (g - a) = m_K \cdot (g - \varepsilon \cdot R) = 620 \cdot (9,81 - 10,1 \cdot 0,6) = 2316 \text{ N}$$

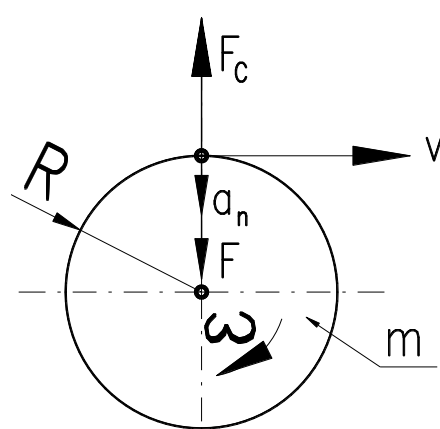
$$v = R \cdot \omega = R \cdot \varepsilon \cdot t = 0,6 \cdot 10,1 \cdot 4 = 24,24 \text{ m/s}$$

$$v = \pi \cdot D \cdot n \rightarrow n = \frac{v}{\pi \cdot D} = \frac{24,24}{\pi \cdot 1,2} = 6,4 \text{ ot/s}$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot R \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10,1 \cdot 0,6 \cdot 4^2 = 48,48 \text{ m}$$

3.11.7.1 Pohyb hmotného bodu po kružnici ve vodorovné rovině

Za předpokladu, že hmotný bod je upevněn na hmotném vlákně a pohybuje se rovnoměrnou rychlostí $v = \text{konst}$, pohybuje se hmotný bod se stálým dostředivým zrychlením.



$$a_n = R \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

Síla způsobující dostředivé (normální) zrychlení se nazývá dostředivou silou. Projevuje se napětím vlákna nebo reakcí podpory.

Podle d'Alembertova principu musí být tato síla v rovnováze se silou setrvačnou, kterou nazýváme odstředivou silou F_c .

$$F_c = m \cdot a_n = m \cdot R \cdot \omega^2 = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Odstředivá a dostředivá síla nekonají práci, protože jsou kolmé k dráze.

Př.: Těleso o hmotnosti $m = 8 \text{ kg}$ rotuje na pevném, nehmotném vlákně po kružnici o poloměru $r = 0,5 \text{ m}$ s počtem otáček $0,83 \text{ s}^{-1}$. Určete: odstředivou sílu F_c a jaké napětí vznikne ve vlákně o průměru 2 mm ?

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$F_c = m \cdot a_n = m \cdot r \cdot \omega^2 = 8 \cdot 0,5 \cdot (2 \cdot \pi \cdot n)^2 = 8 \cdot 0,5 \cdot 2^2 \cdot \pi^2 \cdot 0,83^2 = 108,8 \text{ N}$$

$$\sigma_t = \frac{F_c}{S} = \frac{108,8}{\pi \cdot d^2} = \frac{108,8 \cdot 4}{\pi \cdot 0,002^2} = 34627890,9 \text{ Pa} = 34,6 \text{ MPa}$$

Př.: Letadlo letí rychlostí $v = 720 \text{ km/h}$ (200 m/s) do oblouku o $r = 400 \text{ m}$. Jaká odstředivá síla působí na pilota o hmotnosti $m = 70 \text{ kg}$?

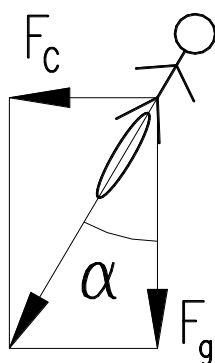
$$F_c = m \cdot \frac{v^2}{r} = 70 \cdot \frac{200^2}{400} = 7000 \text{ N}$$

Jakou největší rychlostí může letadlo vletět do tohoto oblouku, jestliže letec snese zrychlení 10 g ?

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{a_n \cdot r} = \sqrt{10 \cdot g \cdot 400} = 198 \text{ m/s}$$

Př.: Cyklista projíždí obloukem o poloměru $r = 7 \text{ m}$ rychlostí $v = 6 \text{ m/s}$. Pod jakým úhlem se musí sklonit od svislého směru, nemá-li být odstředivou silou vytažen z dráhy?



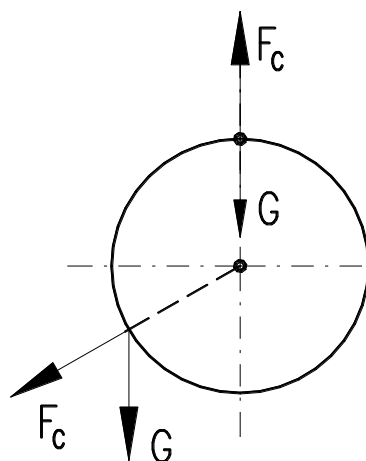
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{F_g} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} = \frac{v^2}{r \cdot g} = \frac{6^2}{7 \cdot 9,81} = 0,524 \rightarrow$$

$$\alpha = 27,65^\circ = 27^\circ 39'$$

3.11.7.2 Pohyb hmotného bodu po kružnici ve svislé rovině

Pohybuje-li se hmotný bod po kružnici ve svislé rovině, na těleso kromě dostředivé síly a setrvačné síly navíc působí tíhová síla G .

Má-li se hmotný bod pohybovat, pak síla, která napíná nehmotné vlákno, musí být ≥ 0 .



$$F_c - G \geq 0$$

$$F_c - m \cdot g \geq 0$$

$$m \cdot \frac{v^2}{r} - m \cdot g \geq 0$$

$$\frac{v^2}{r} - g \geq 0$$

$$\frac{v^2}{r} \geq g$$

$$v \geq \sqrt{g \cdot r}$$

$$v_{\min} = \sqrt{g \cdot r}$$

Př.: Určete minimální obvodovou rychlost v hmotného bodu, který se má pohybovat po kružnici o poloměru $r = 0,5$ m. Dále určete minimální otáčky.

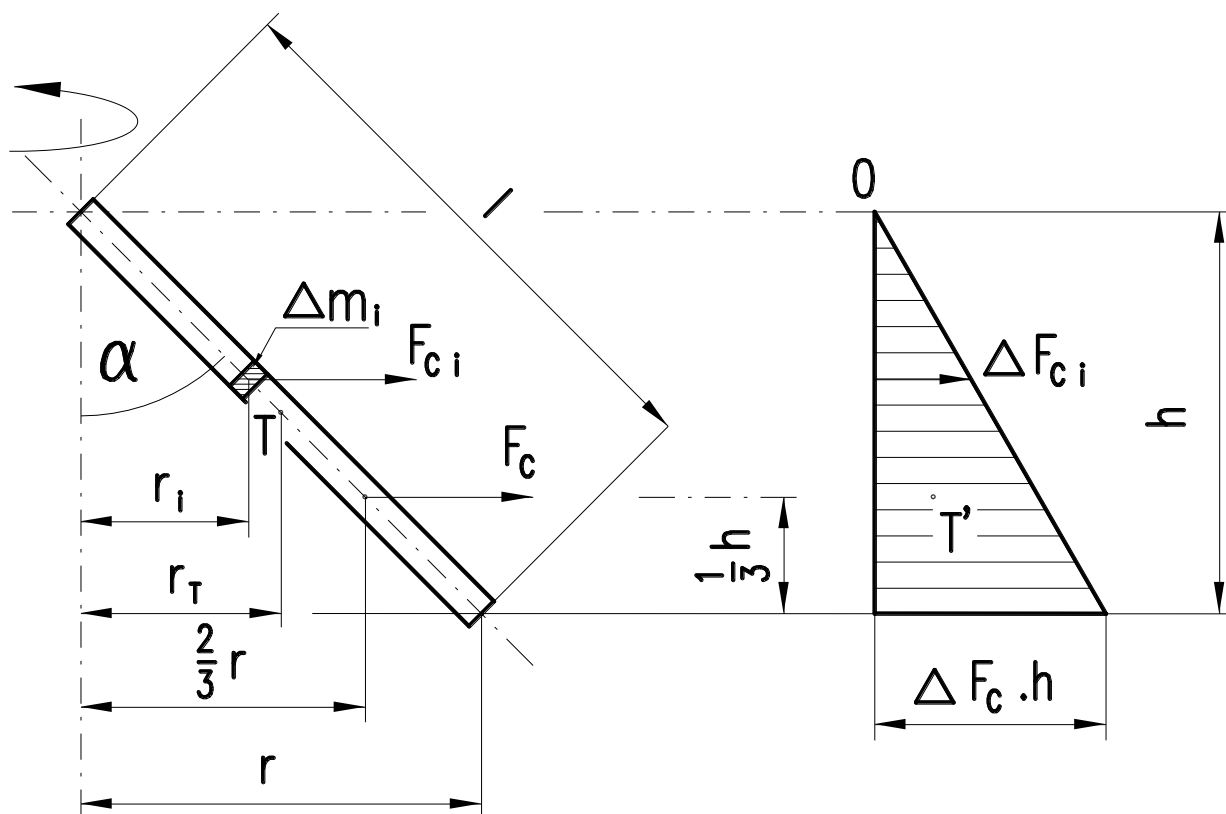
$$v \geq \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9,81 \cdot 0,5} = 2,21 \text{ m/s}$$

$$v = \pi \cdot D \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot n \rightarrow n = \frac{v}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{2,21}{2 \cdot \pi \cdot 0,5} = 0,7 \text{ ot/s}$$

3.11.8 Odstředivá síla tělesa

3.11.8.1 Odstředivá síla rotující tyče

Těžiště odstředivých sil = těžiště trojúhelníku = $\frac{2}{3}$ výšky.

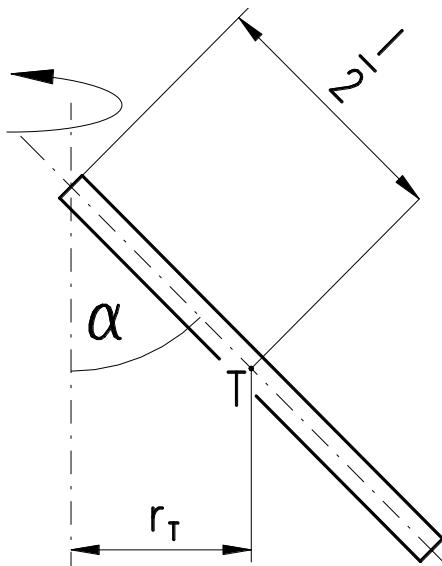


Za předpokladu, že tyč rozdělíme na stejně velké hmotné body Δm , je velikost odstředivé síly působící na hmotný bod dána vztahem $F_{ci} = \Delta m_i \cdot r_i \cdot \omega^2$. Odstředivá síla působící na celé těleso:

$$F_c = \sum F_{ci} = \sum \Delta m_i \cdot r_i \cdot \omega^2 = \omega^2 \sum \Delta m_i \cdot r_i = m \cdot r_T \cdot \omega^2$$

Př.: Ocelová tyč délky $l = 1$ m, průměru 20 mm, má 1 koncový bod na ose rotace. Osa souměrnosti svírá s osou rotace úhel $\alpha = 20^\circ$. Určete velikost odstředivé síly, působící na danou tyč.

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3, n = 10 \text{ ot/s}.$$



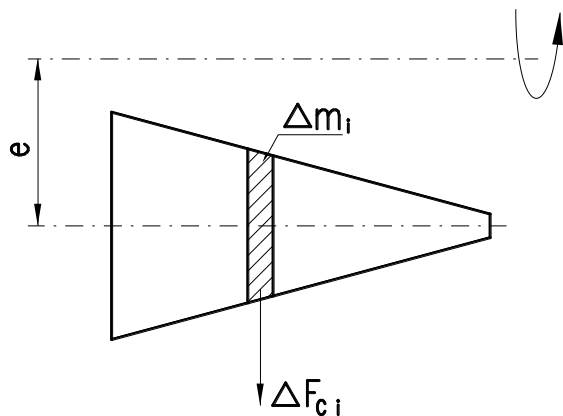
$$\sin \alpha = \frac{r_T}{\frac{l}{2}} \rightarrow r_T = \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot \sin 20^\circ = 0,171 \text{ m}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 62,83 \text{ rad/s}$$

$$m = V \cdot \rho = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l \cdot \rho = \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} \cdot 1 \cdot 7850 = 2,47 \text{ kg}$$

$$F_c = m \cdot r_T \cdot \omega^2 = 2,47 \cdot 0,171 \cdot 62,83^2 = 1667 \text{ N}$$

3.11.8.2 Odstředivá síla tělesa s osou rovnoběžnou s osou otáčení



$$\Delta F_{ci} = \Delta m_i \cdot e \cdot \omega^2$$

Odstředivé síly, které působí na jednotlivé elementy hmoty, tvoří soustavu rovnoběžných sil. Výslednice této soustavy je výsledná odstředivá síla působící na celé těleso.

$$F_c = \sum \Delta F_{ci} = \sum \Delta m_i \cdot e \cdot \omega^2 = e \cdot \omega^2 \cdot \sum \Delta m_i = m \cdot e \cdot \omega^2$$

m – celková hmotnost tělesa;

e – vzdálenost os;

ω – úhlová rychlost.

Př.: Jaká nevyvážená odstředivá síla vznikne u oběžného kola parní turbíny o hmotnosti $m = 60 \text{ kg}$, je-li počet otáček $n = 50 \text{ ot/s}$. Těžiště oběžného kola je ve vzdálenosti 1 mm od osy otáčení.

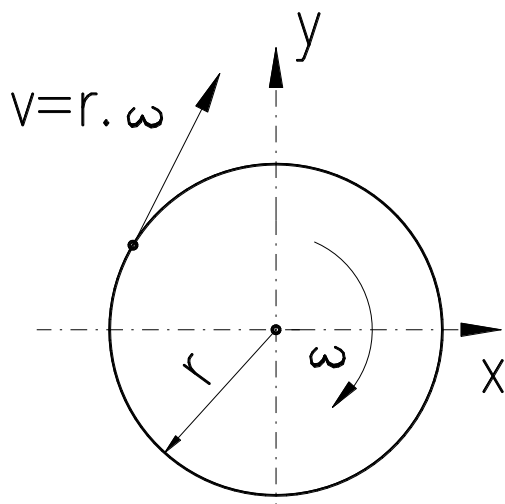
$$F_c = m \cdot e \cdot \omega^2$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$$

$$F_c = m \cdot e \cdot \omega^2 = 60 \cdot 0,001 \cdot 314^2 = 5916 \text{ N}$$

3.11.8.3 Kinetická energie rotujícího tělesa

Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje po kružnici o poloměru r kolem osy procházející těžištěm.



$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$v = r \cdot \omega$$

Energie translačního pohybu:

$$E_{Kt} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

Energie rotačního pohybu:

$$E_{Kr} = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2$$

I_0 – poloměr setrvačnosti, $I_0 = m \cdot r^2$

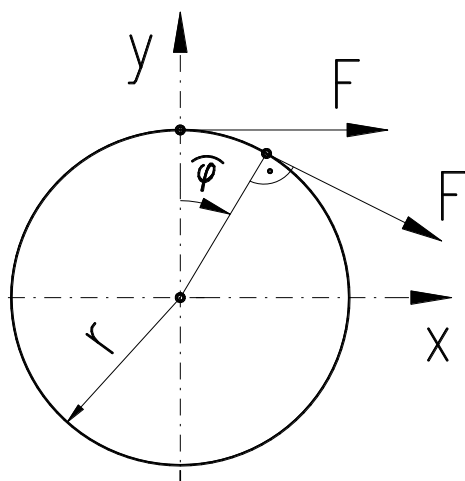
3.11.9 Práce zrychlujících sil

Moment zrychlující síly působící na těleso:

$$(F = m \cdot a, \quad a_t = r \cdot \varepsilon, \quad \text{moment setrvačnosti } I = m \cdot r^2, \quad \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t})$$

$$M = F \cdot r = m \cdot a_t \cdot r = m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \varepsilon = I \cdot \varepsilon$$

Práce zrychlujících sil působících na rotující těleso se projeví změnou kinetické (rotační) energie.



$$s = r \cdot \hat{\varphi}$$

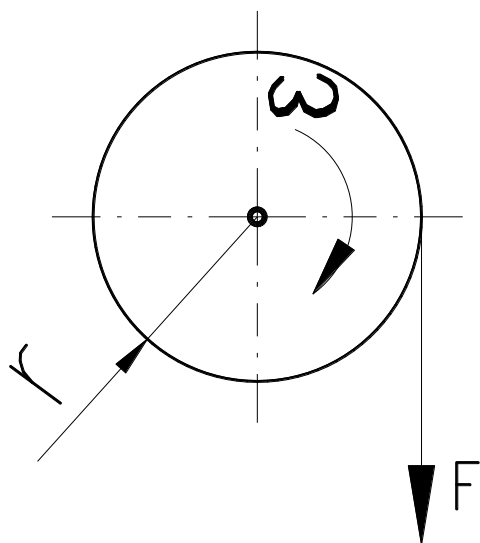
$$W = F \cdot s = F \cdot r \cdot \hat{\varphi} = M \cdot \hat{\varphi}$$

$$W = E_r - E_{or}$$

$$M \cdot \hat{\varphi} = \overbrace{\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2}^{\text{Pohybová energie}} - \overbrace{\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega_0^2}^{\text{Pocáteční energie}}$$

$$M \cdot \hat{\varphi} = I_0 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2}$$

Př.: Jakou práci spotřebuje setrvačnický, který se z klidu rozbíhá na otáčky $n = 3$ ot/s. Kolik přitom proběhne otáček, působí-li hnací síla $F = 250$ N na poloměru $r = 1$ m? Dáno: $I_0 = 1\,260$ kg · m².



Spotřeba práce:

$$W = I_0 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = I_0 \cdot \frac{\omega^2}{2} =$$

$$= I_0 \cdot \frac{2^2 \cdot \pi^2 \cdot n^2}{2} = I_0 \cdot 2 \cdot \pi^2 n^2 =$$

$$= 1260 \cdot 2 \cdot \pi^2 \cdot 3^2 = 223\,843 \text{ J}$$

$$W = M \cdot \hat{\varphi} = F \cdot r \cdot \hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{W}{F \cdot r} = \frac{223843}{250 \cdot 1} = 895 \text{ rad}$$

$$\hat{\varphi} = 2 \cdot \pi \cdot i \rightarrow i = \frac{\hat{\varphi}}{2 \cdot \pi} = \frac{895}{2 \cdot \pi} = 142,5 \text{ ot}$$

3.11.10 Impuls momentu a moment hybnosti

Podobně jako impuls síly a hybnost $F \cdot t = m \cdot v$ platí:

$$\boxed{M \cdot t = I \cdot \omega}$$

(I – moment setrvačnosti).

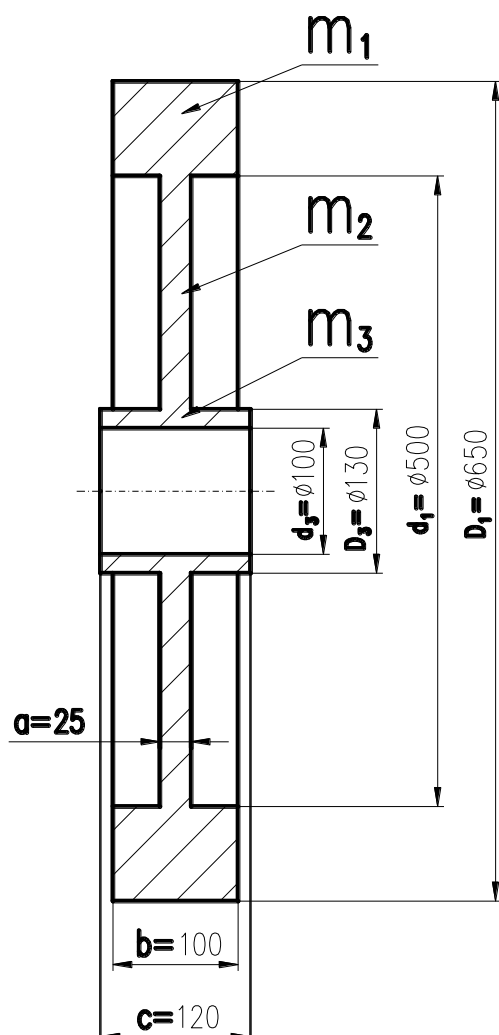
3.11.11 Shrnutí dynamiky posuvného a rotačního pohybu

Jednoduše transformujeme: $F \rightarrow M$; $m \rightarrow I_0$; $v \rightarrow \omega$; $a \rightarrow \varepsilon$; $s \rightarrow \varphi$

	Posuvný pohyb (translační)	Pohyb rotační
Základní rovnice	$F = m \cdot a$	$M = I_0 \cdot \varepsilon$
Kinetická energie	$E_{Kt} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	$E_{Kr} = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2$
Práce zrychlujících sil	$W = F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot (v^2 - v_0^2)$	$W = M \cdot \hat{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)$
Impuls a hybnost	$F \cdot t = m \cdot (v - v_0)$	$M \cdot t = I_0 \cdot (\omega - \omega_0)$

Př.: Setrvačník hnacího stroje s otáčkami $n_0 = 6,6 \text{ s}^{-1}$ má měrnou hmotnost $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Určete moment setrvačnosti setrvačníku I_0 a setrvačný moment $m \cdot D^2$. Bude-li stroj přetížen, klesnou jeho otáčky o 10 %. Jakou přitom setrvačník vykoná práci? Zabrzdí-li se setrvačník za 5 otáček, jaké je potřeba brzdící síly na obvodě a jak velké napětí v krutu vznikne na hřídeli?



$$m_1 = \rho \cdot V_1 = \rho \cdot \pi \cdot \frac{D_1^2 - d_1^2}{4} \cdot b =$$

$$= 7,8 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot \frac{0,65^2 - 0,5^2}{4} \cdot 0,1 = 105,68 \text{ kg}$$

$$m_2 = \rho \cdot V_2 = \rho \cdot \pi \cdot \frac{d_1^2 - D_3^2}{4} \cdot a =$$

$$= 7,8 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot \frac{0,5^2 - 0,13^2}{4} \cdot 0,025 = 35,7 \text{ kg}$$

$$m_3 = \rho \cdot V_3 = \rho \cdot \pi \cdot \frac{D_3^2 - d_3^2}{4} \cdot c =$$

$$= 7,8 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot \frac{0,13^2 - 0,1^2}{4} \cdot 0,12 = 5,07 \text{ kg}$$

$$I_{01} = m_1 \cdot \frac{R_1^2 + r_1^2}{2} = 105,68 \cdot \frac{0,325^2 + 0,25^2}{2} = 8,88 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{02} = m_2 \cdot \frac{r_1^2 + R_3^2}{2} = 35,7 \cdot \frac{0,25^2 + 0,065^2}{2} = 1,19 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{03} = m_3 \cdot \frac{R_3^2 + r_3^2}{2} = 5,07 \cdot \frac{0,065^2 + 0,05^2}{2} = 0,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_0 = I_{01} + I_{02} + I_{03} = 8,88 + 1,19 + 0,02 = 10,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Setrvačný moment $m \cdot D^2$:

$$\overbrace{m \cdot D^2}^{\text{Vzorec}} = 4 \cdot I_0 = 4 \cdot 10,1 = 40,14 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

D – průměr setrvačnosti

$$W = \frac{1}{2} I_0 \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot n_0$$

$$n = 0,9 \cdot n_0 = 0,9 \cdot 6,6 = 5,94 \text{ s}^{-1}$$

(– 10 %)

Máme úbytek kinetické energie, tedy práce vyjde záporná, nedodáváme ji, ale získáváme (nebo prohodíme ω a ω_0).

$$W = \frac{1}{2} I_0 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot [(0,9 \cdot n_0)^2 - n_0^2] = 2 \cdot \pi^2 \cdot I_0 \cdot n_0^2 \cdot (0,9^2 - 1) = 2 \cdot \pi^2 \cdot 10,1 \cdot 6,6^2 \cdot (0,9^2 - 1) = -1650 \text{ J}$$

$$W = M \cdot \hat{\varphi}$$

$$\text{dráha } \hat{\varphi} = 2 \cdot \pi \cdot i = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 31,4 \text{ rad}$$

$$M = \frac{W}{\hat{\varphi}} = \frac{1650}{31,4} = 52,5 \text{ Nm}$$

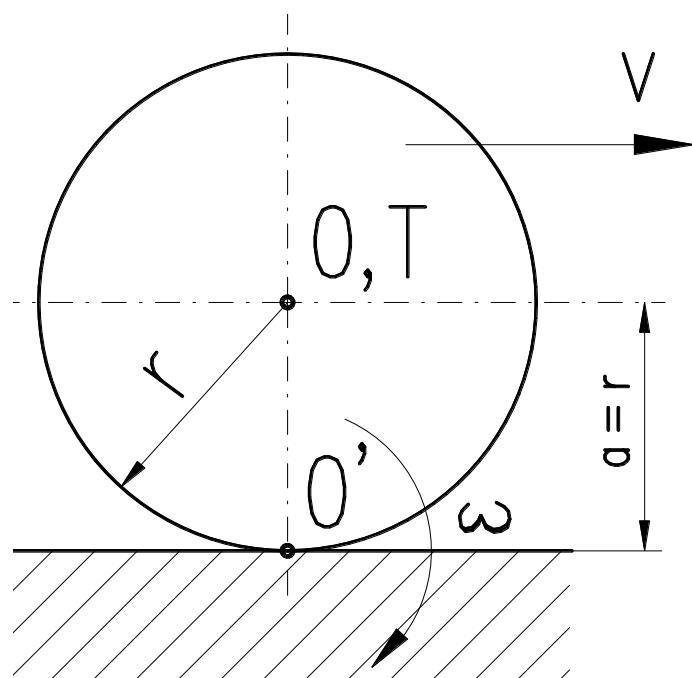
$$M = F \cdot R_1 \rightarrow F = \frac{M}{R_1} = \frac{52,5}{0,325} = 161,7 \text{ N} \quad (R_1 - \text{na obvodu setrvačníku})$$

$$\tau_K = \frac{M_K}{W_K} \leq \tau_{DovK}$$

$$\tau_K = \frac{M_K}{\frac{\pi \cdot d_3^3}{16}} = \frac{52500 \cdot 16}{\pi \cdot 100^3} = 0,27 \text{ MPa}$$

3.11.12 Pohybová energie při obecném pohybu

Při válčení těles se těleso otáčí kolem okamžité osy otáčení O' , která svou polohu mění.



Kinetická energie:

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} \cdot I_0' \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \overbrace{(I_0 + m \cdot r^2)}^{\text{Steinerova věta}} \cdot \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m \cdot \overbrace{r^2 \cdot \omega^2}^{v^2} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2}_{\text{Rotací kinetická energie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}_{\text{Translační kinetická energie}} \end{aligned}$$

$$E_K = E_{Kr} + E_{Kt}$$

Př.: Jaká je pohybová energie ocelové koule průměru 200 mm, která se kutálí po vodorovné rovině rychlostí $v = 5 \text{ m/s}$?

$$E = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m \cdot \overbrace{r^2 \cdot \omega^2}^{v^2} \quad (v = \omega \cdot r)$$

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} m \cdot r^2 \right) \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = 0,5 \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{2}{5} + 1 \right) = 0,5 \cdot m \cdot v^2 \cdot \left(\frac{2}{5} + 1 \right) = 0,7 \cdot m \cdot v^2$$

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 7,85 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,1^3 = 32,9 \text{ kg}$$

$$E = 0,7 \cdot m \cdot v^2 = 0,7 \cdot 32,9 \cdot 5^2 = 575,75 \text{ J}$$

3.12 Vyvažování

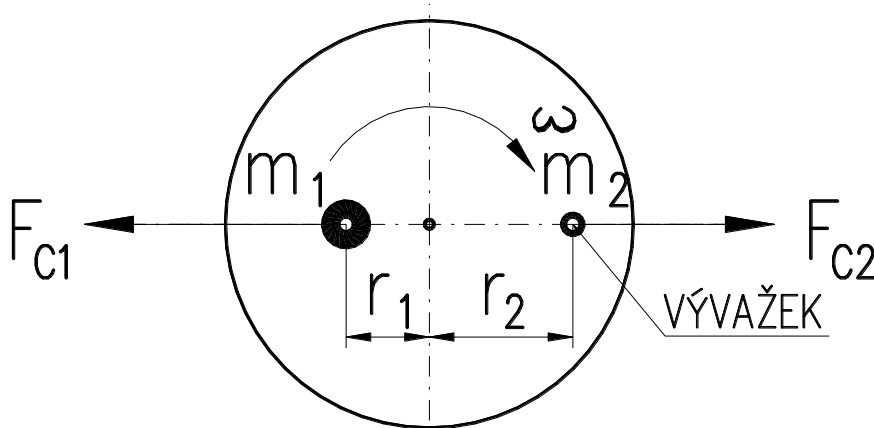
Při rotaci nevyvážených součástí vznikají odstředivé síly, které mohou vyvolat značné chvění.

3.12.1 Vyvažování otáčejících se hmot:

3.12.1.1 Statické:

Je vhodné pro součásti tvaru tenkého kotouče při nízkých otáčkách. Nevede většinou k uspokojivým výsledkům. Používá se pro poměr šířky kotouče a průměru $\frac{L}{D} \leq 0,2$.

Vývažek je umístěn tak, aby odstředivé síly působící na jednotlivé nevyvážené hmoty byly v rovnováze (jejich výslednice = 0). Pokud je na součásti nevyvážena hmota m_1 na poloměru r_1 , musíme na poloměru r_2 dodat takovou hmotu, aby byla splněna podmínka:



$$F_{c1} - F_{c2} = 0$$

$$F_{c1} = F_{c2}$$

$$m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2 = m_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2$$

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

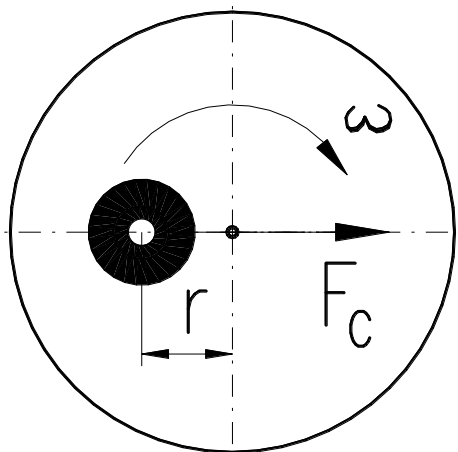
$$m_2 = m_1 \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

Pokud na těleso působí několik nevyvážených hmot, určujeme polohu vývažku z podmínky statické rovnováhy:

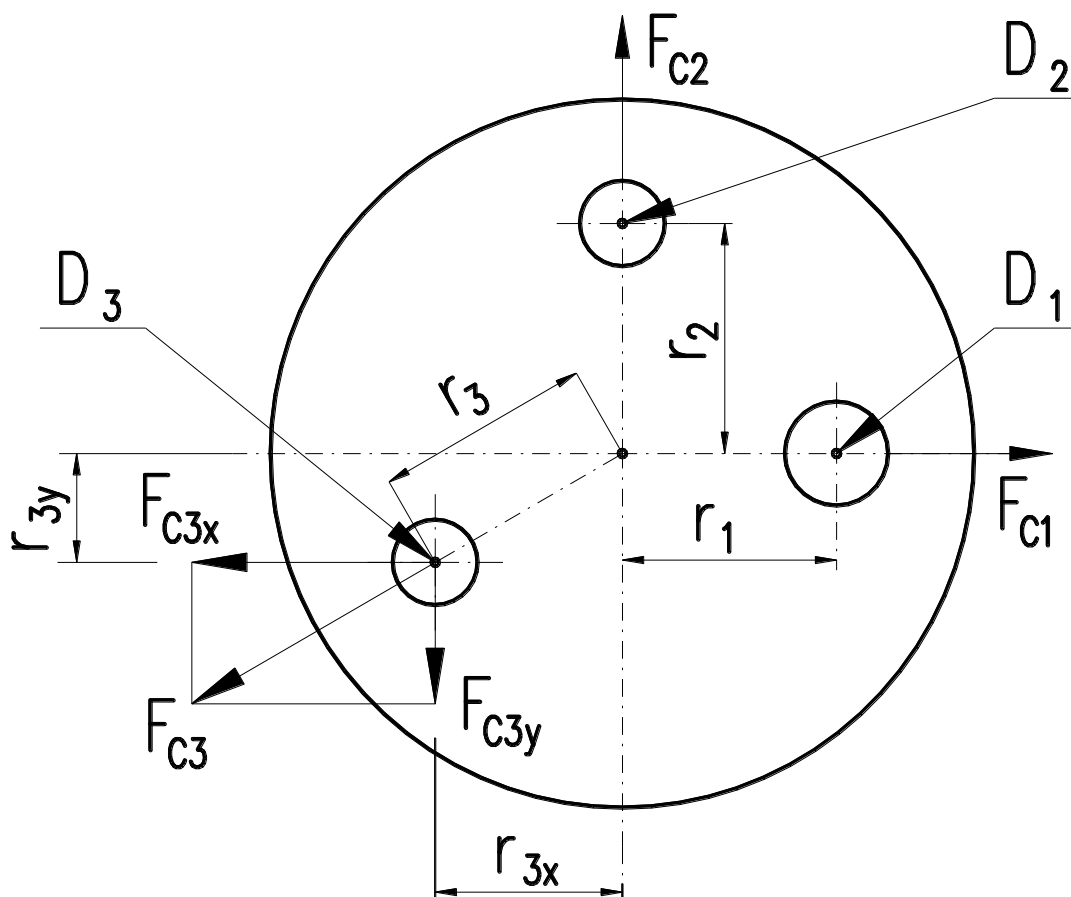
$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

Pokud je ve vyvažované součásti otvor, odstředivé síle dáme opačný smysl.



Př.: Na kotouči jsou nálitky $D_1 = 50\text{mm}$, $r_1 = 150\text{mm}$, $D_2 = 60\text{mm}$, $r_2 = 120\text{mm}$. Určete polohu průměru $D_3 = 45\text{mm}$, $r_3 = ?$



$$F_c = m \cdot r_T \cdot \omega^2$$

ω – stejné pro všechny, tedy mohu vynechat;

$$F_{c1} = m_1 \cdot r_1 = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot \rho \cdot b \cdot r_1$$

$$F_{c2} = m_2 \cdot r_2 = \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot \rho \cdot b \cdot r_2$$

$$F_{c3} = m_3 \cdot r_3 = \frac{\pi \cdot D_3^2}{4} \cdot \rho \cdot b \cdot r_3$$

Podmínky rovnováhy:

$$\text{a) } \sum F_{ix} = F_{c3x} - F_{c1} = 0$$

$$\text{b) } \sum F_{iy} = F_{c3y} - F_{c2} = 0$$

$$\text{a) } \sum F_{ix} = F_{c3x} - F_{c1} = 0$$

$$F_{c3x} = F_{c1}$$

$$m_3 \cdot r_{3x} \cdot \omega^2 = m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2$$

$$m_3 \cdot r_{3x} = m_1 \cdot r_1$$

$$\frac{\pi \cdot D_3^2}{4} \cdot b \cdot \rho \cdot r_{3x} = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot b \cdot \rho \cdot r_1$$

$$D_3^2 \cdot r_{3x} = D_1^2 \cdot r_1$$

$$r_{3x} = \frac{D_1^2 \cdot r_1}{D_3^2} = \frac{0,05^2 \cdot 0,15}{0,045^2} = 0,185m$$

$$\text{b) } \sum F_{iy} = F_{c3y} - F_{c2} = 0$$

$$F_{c3y} = F_{c2}$$

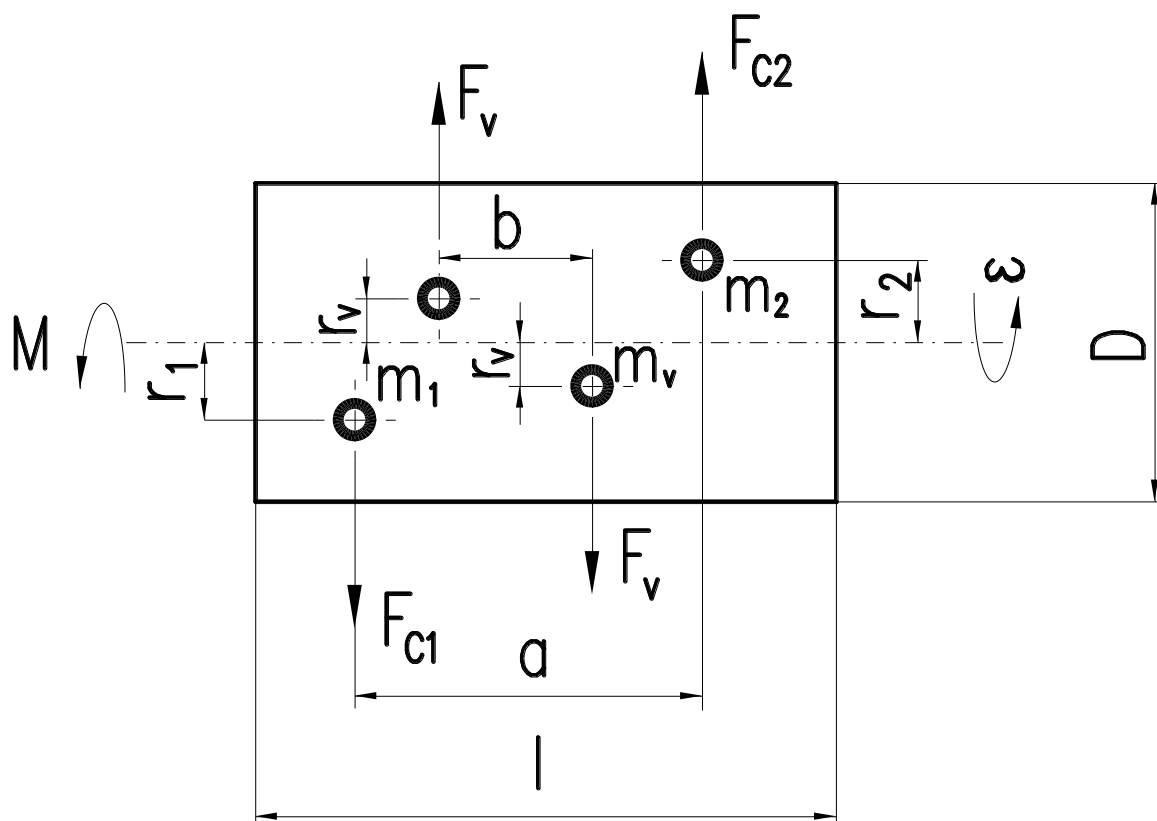
$$r_{3y} = \frac{D_2^2 \cdot r_2}{D_3^2} = \frac{0,06^2 \cdot 0,12}{0,045^2} = 0,213m$$

$$r_3 = \sqrt{r_{3x}^2 + r_{3y}^2} = \sqrt{0,185^2 + 0,213^2} = 0,282m$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{r_{3y}}{r_{3x}} = \frac{0,213}{0,185} = 1,15 \rightarrow \alpha = 49^\circ$$

3.12.1.2 Dynamické vyvažování

Používá se pro poměr šířky kotouče a průměru $\frac{L}{D} \leq 0,2$.



Pokud je splněna podmínka $m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$, je součást staticky vyvážená. Nevývážený zůstává moment odstředivých sil $M = F_{c1} \cdot a$.

Tento moment musíme vyvážit jiným, stejně velkým momentem, ale opačného znaménka. Vyvážky mohou být umístěny v libovolných rovinách.

$$M_1 - M_v = 0$$

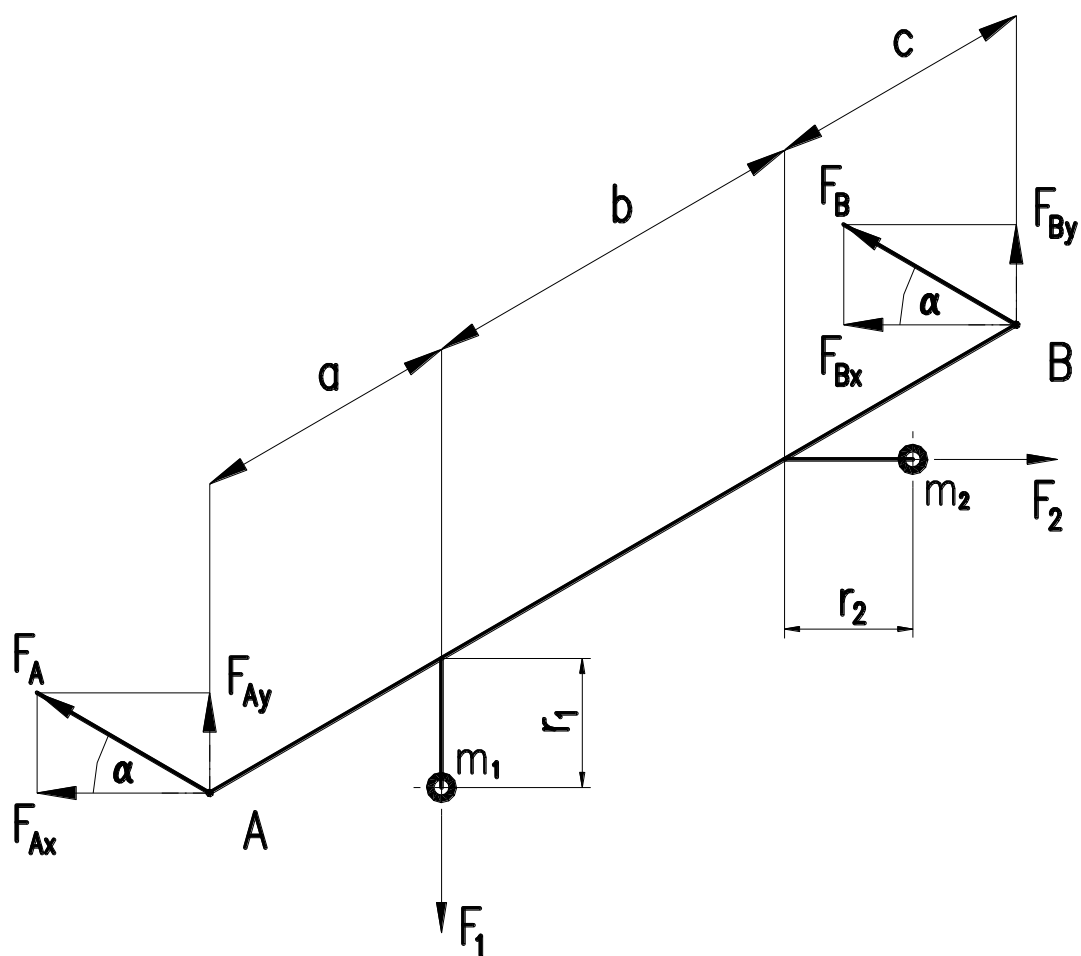
$$M_1 = M_2$$

$$F_{c1} \cdot a = F_v \cdot b$$

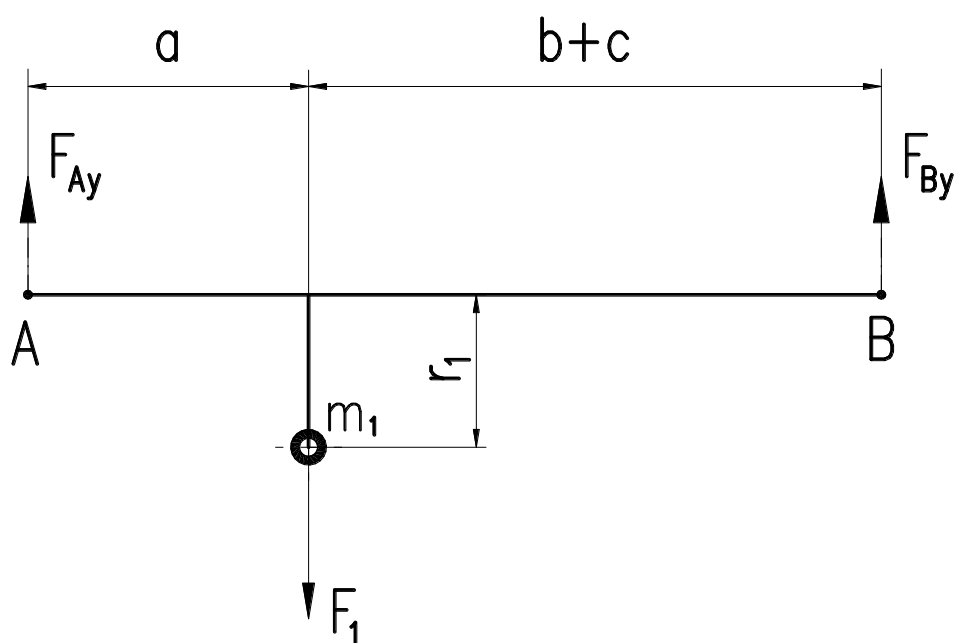
$$m_1 \cdot r_1 \cdot a = m_v \cdot r_v \cdot b$$

Př.: Provedte vyvážení hřídele, který je v bodě 1 zatížen nevyváženou hmotou $m_1 = 1 \text{ kg}$, $r_1 = 150 \text{ mm}$. V bodě 2 je nevyvážená hmota $m_2 = 1,2 \text{ kg}$, $r_2 = 100 \text{ mm}$. Vývažky umístěte v bodech A, B.

Nevyvážená hmota m_1 – svislá rovina;
 m_2 – vodorovná rovina.



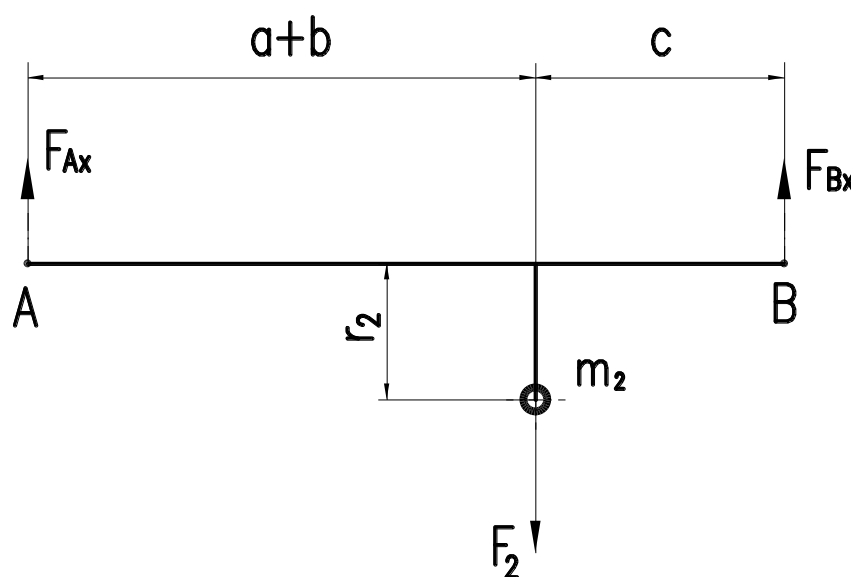
Vyvážení hmoty m_1 :



$$\sum F_i = 0 \quad F_{Ay} + F_{By} - F_1 = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Ay} = F_1 - F_{By}$$

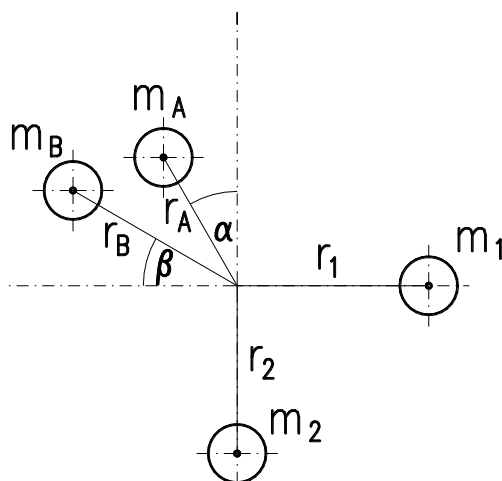
$$\sum M_i = 0 \quad F_1 \cdot a - F_{By} \cdot (a + b + c) = 0 \quad \rightarrow \quad F_{By} = \frac{F_1 \cdot a}{a + b + c}$$

Vyvážení m_2 :



$$\sum F_i = 0 \quad 0 = F_{Ax} + F_{Bx} - F_2 \quad \rightarrow \quad F_{Ax} = F_2 - F_{Bx}$$

$$\sum M_i = 0 \quad 0 = F_2 \cdot (a+b) - F_{Bx} \cdot (a+b+c) \quad \rightarrow \quad F_{Bx} = F_2 \cdot \frac{a+b}{a+b+c}$$



$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}}$$

$$\tan \beta = \frac{F_{Bx}}{F_{By}}$$

$$F_1 = m_1 \cdot g = 1 \cdot 10 = 10 \text{ N}$$

$$F_2 = m_2 \cdot g = 1,2 \cdot 10 = 12 \text{ N}$$

$$a = 200, b = 250, c = 300, r_A = r_B = 150 \text{ mm}, m_A = ?, m_B = ?, \alpha = ?, \beta = ?$$

$$F_{By} = \frac{F_1 \cdot a}{a + b + c} = \frac{10 \cdot 200}{200 + 250 + 300} = 2,6\bar{6} N$$

$$F_{Ay} = F_1 - F_{By} = 10 - 2,6\bar{6} = 7,34 N$$

$$F_{Bx} = F_2 \cdot \frac{a + b}{a + b + c} = 12 \cdot \frac{200 + 250}{200 + 250 + 300} = 7,2 N$$

$$F_{Ax} = F_2 - F_{Bx} = 12 - 7,2 = 4,8 N$$

$$F_A = \sqrt{4,8^2 + 7,34^2} = 8,8 N$$

$$F_B = \sqrt{7,2^2 + 2,66^2} = 7,68 N$$

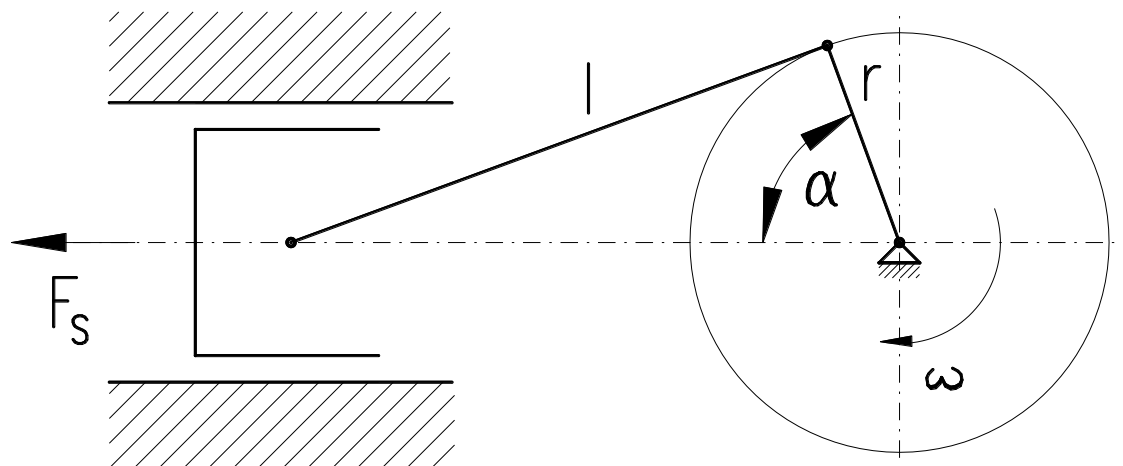
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{7,34}{4,8} = 1,529 \rightarrow \alpha = 56^\circ 49'$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_{Bx}}{F_{By}} = \frac{7,2}{2,66} = 2,707 \rightarrow \beta = 69^\circ 43'$$

$$m_A = \frac{F_A}{g} = \frac{8,8}{10} = 0,88 kg$$

$$m_B = \frac{F_B}{g} = \frac{7,68}{10} = 0,77 kg$$

3.12.2 Vyvažování hmot pohybujících se přímočaře vratně



Setrvačná síla působící na posouvající hmoty:

$$F_S = m_p \cdot a = m_p \cdot r \cdot \omega^2 \cdot (\cos \alpha \pm \lambda \cdot \cos 2\alpha)$$

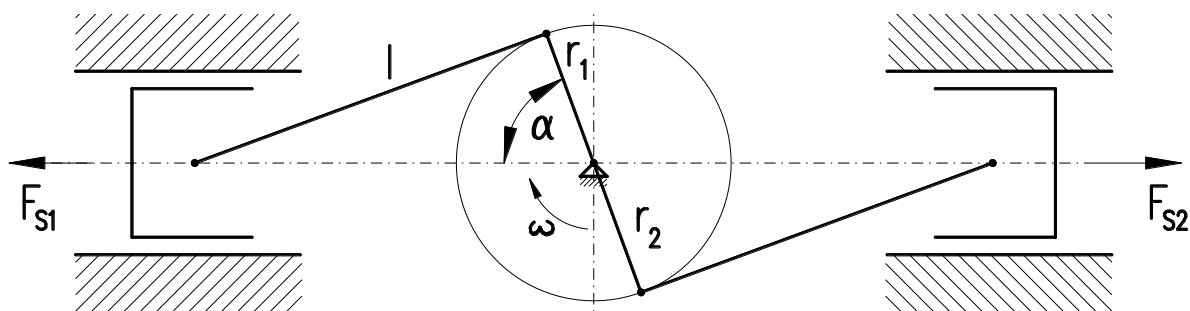
$$\lambda = \frac{r}{l}$$

m_p – hmotnost součástí konajících přímočarý vratný pohyb (píst, křížák, pístní tyč, část ojnice).

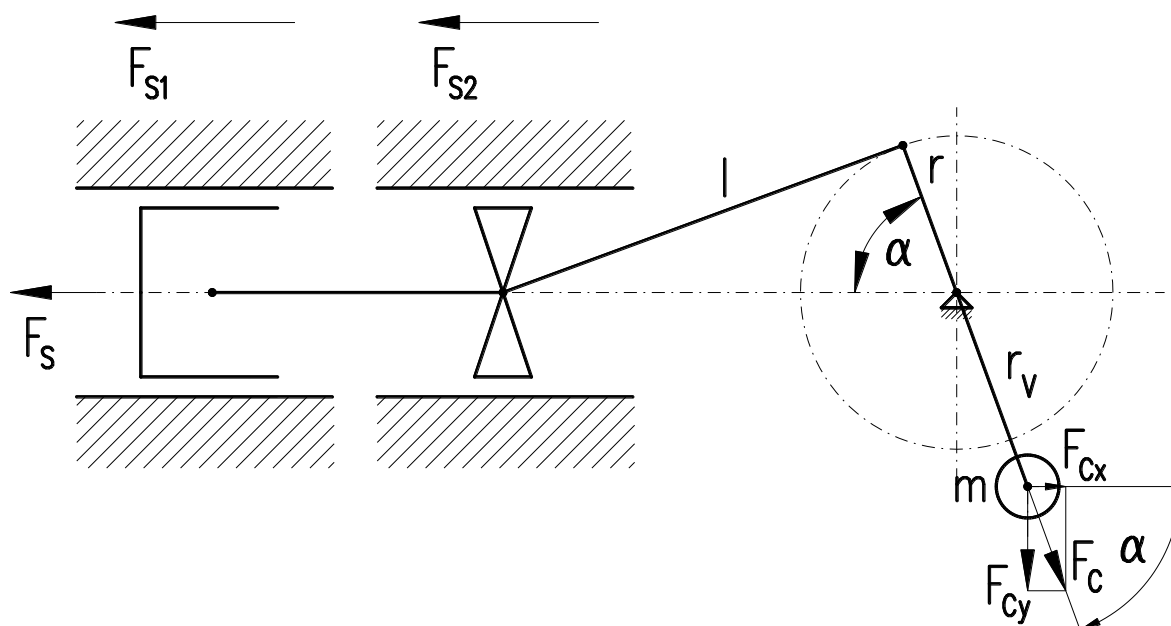
Zrychlení i setrvačná síla se mění během 1 otáčky přibližně podle paraboly.

Vyvažujeme:

a) hmotami konajícími rovněž přímočařý vratný pohyb, pro dokonalé vyvážení platí $F_{S1} = F_{S2}$.



b) hmotami konajícími rotační pohyb.



Proti setrvačné síle působí síla odstředivá.

$$F_S = m_p \cdot a = m_p \cdot r \cdot \omega^2 \cdot (\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha) = \overbrace{m_p \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha}^{F_{SI}} + \overbrace{m_p \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \lambda \cdot \cos 2\alpha}^{F_{SII}}$$

F_{SI} – setrvačné síly I. řádu

F_{SII} – setrvačné síly II. řádu

Pro $\alpha = 0$:

$$F_S = m_p \cdot r \cdot \omega^2 \cdot (1 + \lambda)$$

Pro $\alpha = 180^\circ$:

$$F_S = m_p \cdot r \cdot \omega^2 \cdot (1 - \lambda)$$

$$\lambda = \frac{r}{l} = \left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{15} \right)$$

U protizávaží: Vodorovná složka odstředivé síly:

($\cos 0^\circ = 1$, $\cos 180^\circ = -1$)

$$F_{cx} = F_c \cdot \cos \alpha$$

$$F_{SI} = F_{cx} = m_v \cdot r_v \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha$$

$$m_p \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha = m_v \cdot r_v \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha$$

$$m_p \cdot r = m_v \cdot r_v$$

Při tomto způsobu vyvažování zůstává nevyvážený moment setrvačných sil 1. řádu, setrvačných sil 2. řádu a složky F_{cy} .

4 Hydromechanika

Hydromechanika je nauka o fyzikálních jevech a zákonitostech rovnováhy a pohybu kapalin. Dělí se na hydrostatiku a hydrodynamiku.

Pro skutečné kapaliny, se kterými se v praxi setkáváme (voda, olej), by se obtížně vyjadřovaly zákony hydromechaniky. Proto při odvozování základních zákonitostí byl zaveden pojem **ideální kapalina**.

To je kapalina, která je bez jakékoliv soudružnosti částic, bez vnitřního tření (bez viskozity), je dokonale nestlačitelná a nemění svůj objem při změnách teploty.

4.1 Hydrostatika

Nauka o rovnováze kapalin a jejich účinků na tuhá tělesa v klidu. Kapalina je v rovnováze v klidu, jestliže se její částičky nepohybují vzhledem ke stěnám nádoby, v níž se nachází. Je-li nádoba vůči zemi v klidu a kapalina se nepohybuje, hovoříme o **absolutní rovnováze**. Pohybuje-li se nádoba a kapalina je vůči stěnám v klidu, hovoříme o **relativní rovnováze**.

4.1.1 Tlak

Vyjadřuje plošný účinek síly a je určen silou působící kolmo na jednotku plochy.

$$p = \frac{F}{S} [Pa] \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

V praxi:

$1kPa = 10^3 Pa$	$1MPa = 10^6 Pa$	$1hPa = 10^2 Pa$	$1mPa = 10^{-3} Pa$
------------------	------------------	------------------	---------------------

Dříve používané jednotky:	
$1 \text{ mbar} = 10^2 \text{ Pa} = 1 \text{ hPa}$	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 0,1 \text{ MPa}$
$1 \text{ kp/cm}^2 = 9,80665 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$	$1 \text{ kp/m}^2 = 9,80665 \text{ Pa} = 1 \text{ mm H}_2\text{O}$
$1 \text{ atm} = 0,1 \text{ MPa}$	$1 \text{ torr} = 1 \text{ mm Hg} = 133,34 \text{ Pa}$

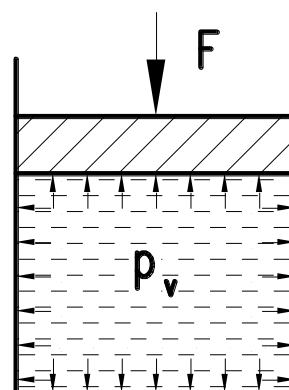
4.1.1.1 Tlak v kapalině vyvozen vnější silou

Na povrch kapaliny se přenáší účinek vnějších sil jako tlak působící na kapalinu z vnějšku – tzv. **vnější tlak** p_v .

Vnější tlak může být vyvozen:

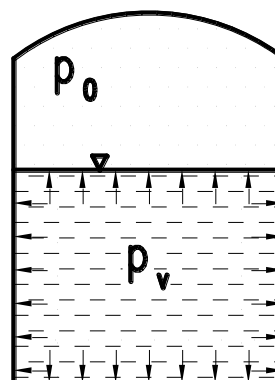
a) Vnější silou působící na píst v uzavřeném prostoru.

$$p_v = \frac{F}{S}$$

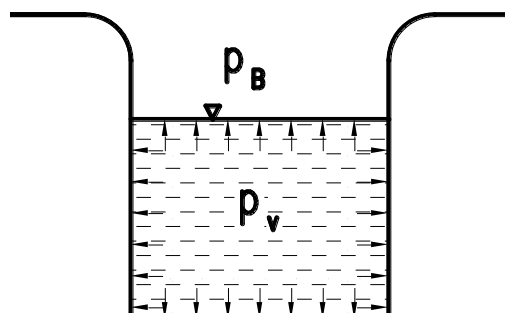


$$p_0 = p_v$$

b) Tlakem tekutiny: např. stlačeným plynem působícím na hladinu v uzavřené nádobě.



c) Tlakem vzdušného obalu Země – **atmosférickým** (barometrickým) **tlakem** působícím na hladinu otevřených nádob – p_b



Hladinová plocha, na kterou působí atmosférický tlak, se nazývá **volná hladina**.

Hladinová plocha, na kterou působí jiný než atmosférický tlak, se nazývá **napjatá hladina**.

Neuvažujeme-li působení tíhového pole Země, platí Pascalův zákon:

Tlak v celém objemu kapaliny je stejný, v kapalině se šíří rovnoměrně všemi směry a působí vždy kolmo na ponořená tělesa (stěny).

Tlaková síla působící na rovinnou plochu:

$$F_p = p \cdot S$$

Podle Pascalova zákona je tlak v celém objemu kapaliny stejný, tlaková energie je proto rovna součinu objemu a tlaku.

$$E_p = V \cdot p_v = \frac{m}{\rho} \cdot p_v \quad [J]$$

$$\text{Energie 1 kg kapaliny: } e_p = \frac{E_p}{m} = \frac{p}{\rho} \left[\frac{J}{kg} \right]$$

4.1.1.2 Tlak v kapalině vyvolaný vlastní tíhou kapaliny

$$p_h = \frac{G}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{V \cdot \rho \cdot g}{S} = \frac{S \cdot h \cdot \rho \cdot g}{S}$$

Hydrostatický tlak:

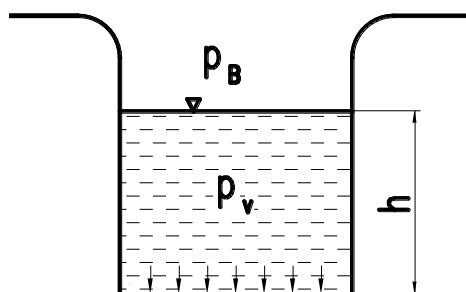
$$p_h = h \cdot \rho \cdot g$$

Hydrostatický tlak je ve stejnorodé kapalině a ve stejné hloubce pod hladinou stejný.

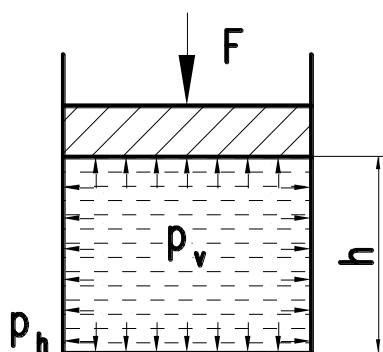
Hydrostatický tlak se někdy vyjadřuje **výškou sloupce kapaliny**.

$$h = \frac{p_h}{\rho \cdot g} [m]$$

p_b = atmosférický (barometrický) tlak vzduchu je vyvozený tíhou vzdušného obalu Země.



4.1.1.3 Statický tlak



Souhrnný účinek tlaku vyvozeného působením **vnějších sil** a **hydrostatického tlaku** nazýváme **tlakem statickým**.

$$p_s = p_v + p_h$$

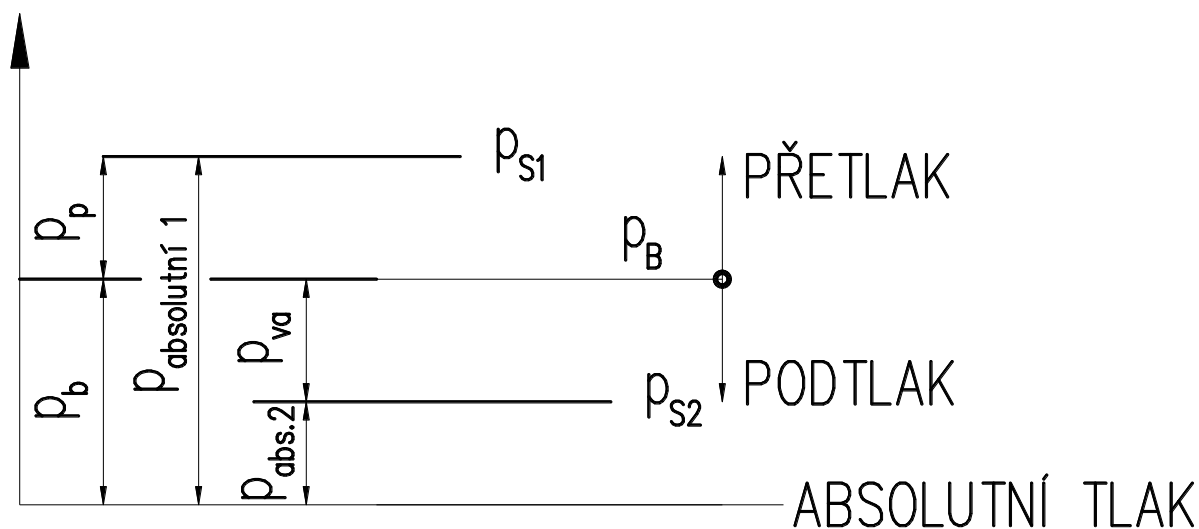
Působí-li na volnou hladinu otevřené nádoby **atmosférický tlak**

p_b , pak statický tlak se rovná:

$$p_s = p_b + p_h$$

4.1.1.4 Absolutní tlak, přetlak, podtlak

Statický tlak je tlak měřený vzhledem k absolutní tlakové nule. Tento tlak je označován jako **absolutní tlak**. Tlakoměry udávají tlak vzhledem k atmosférickému tlaku.



Přetlak: $p_p = p_s - p_b$

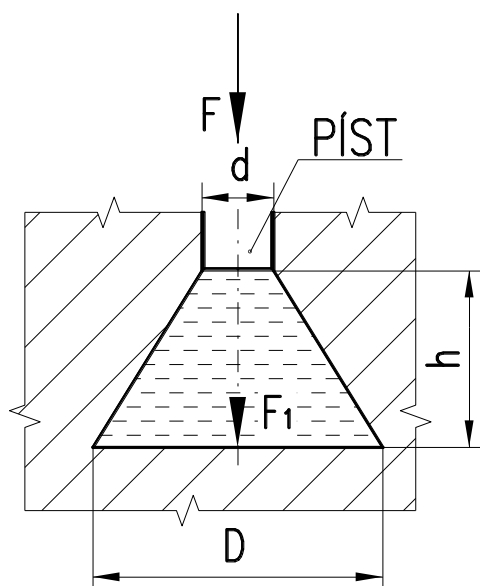
Podtlak: $p_{va} = p_b - p_s$

Atmosférický tlak: p_b

Vnější tlak: p_v

Absolutní tlaky: p_{s1}, p_{s2}

Př.: Určete jakou silou působí voda na dno nádoby průměru $D = 920$ mm naplněné vodou do výšky $h = 1350$ mm, jestliže na píst průměru $d = 480$ mm působí síla $F = 5000$ N.



$$p_a = \frac{N}{m^2} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{kg}{s^2 \cdot m}$$

$$p_h = h \cdot \rho \cdot g = 1,35m \cdot 1000 kg/m^3 \cdot 10m/s^2 = 13500 kg/m \cdot s^2 = 13500 Pa$$

$$p_v = \frac{F}{S} = \frac{F \cdot 4}{\pi \cdot d^2} = \frac{5000 \cdot 4}{\pi \cdot 0,48^2} = 27631 Pa$$

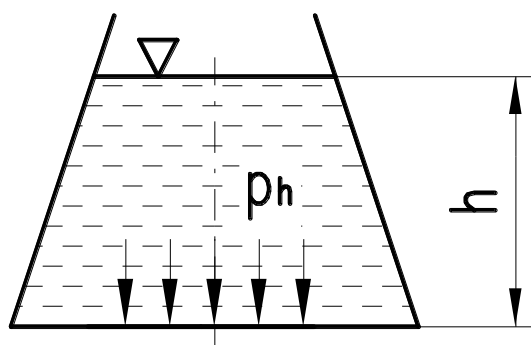
$$p_s = p_h + p_v = 13500 + 27631 = 41131 Pa$$

$$F_1 = p_s \cdot S = p_s \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 41131 \cdot \frac{\pi \cdot 0,92^2}{4} = 27342 N$$

4.1.1.5 Tlak kapaliny na ponořené stěně

4.1.1.5.1 Tlak na dno nádoby

Na vodorovné dno nádoby působí hydrostatický tlak p_h .



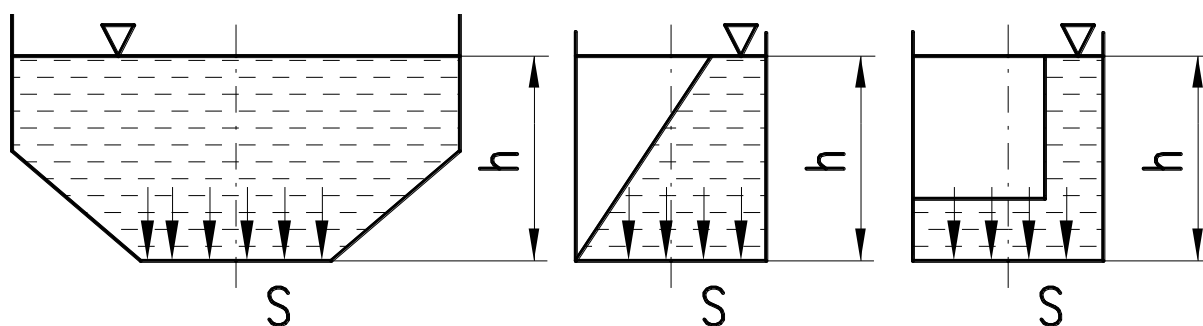
$$p_h = h \cdot \rho \cdot g$$

Síla působící na dno:

$$F = S \cdot p_h = S \cdot h \cdot \rho \cdot g = V \cdot \rho \cdot g = m \cdot g$$

U nádoby konst. průřezu je síla působící na dno rovna tíze kapaliny nad dnem nádoby bez ohledu na tvar nádoby.

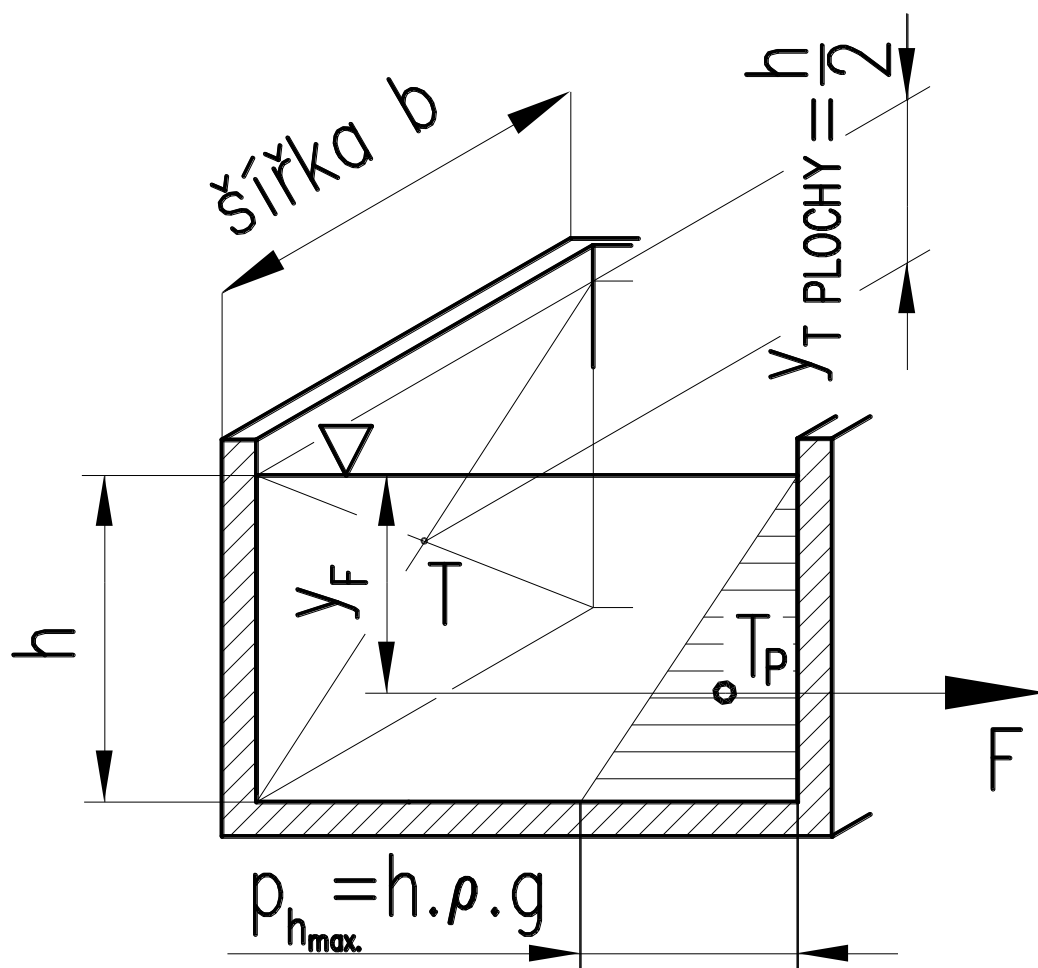
4.1.1.5.2 Tlak kapaliny na vodorovnou stěnu



S a h jsou stejné tedy i síly F na dno jsou stejné: $F = S \cdot h \cdot \rho \cdot g$

4.1.1.5.3 Tlak kapaliny na svislou obdélníkovou stěnu:

V jednotlivých hloubkách je tlak $p_{hi} = h_i \cdot \rho \cdot g \rightarrow$ mění se lineárně s hloubkou.



Hydrostatický tlak v těžišti ponořené plochy $p_{hT} = \rho \cdot g \cdot y_{Tplochy}$

p_h pro obdélník: $p_h = \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2}$

Tlaková síla na svislou stěnu:

$$F = S \cdot p_{hT} = S \cdot \rho \cdot g \cdot y_T = b \cdot h \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2} = \frac{\rho}{2} g \cdot b \cdot h^2$$

Tlaková síla leží v těžišti T_P zatěžovacího obrazce (Δ), tedy $y_F = \frac{2}{3}h$

Obecně lze využít kvadratického momentu k těžišťové ose. Potom:

$$y_F = \frac{J_x}{S \cdot y_T} + y_T$$

J_x – kvadratický moment k ose procházející těžištěm zatížené plochy;

S – obsah zatížené plochy;

y_T – vzdálenost těžiště ponořené plochy od hladiny.

4.1.1.5.4 Tlak kapaliny na obecně položenou rovinnou plochu

Obecně platí:

$$F = S \cdot p_{hT} = S \cdot h_T \cdot \rho \cdot g$$

S – obsah ponořené plochy;

p_{hT} – hydrostatický tlak v těžišti ponořené plochy.

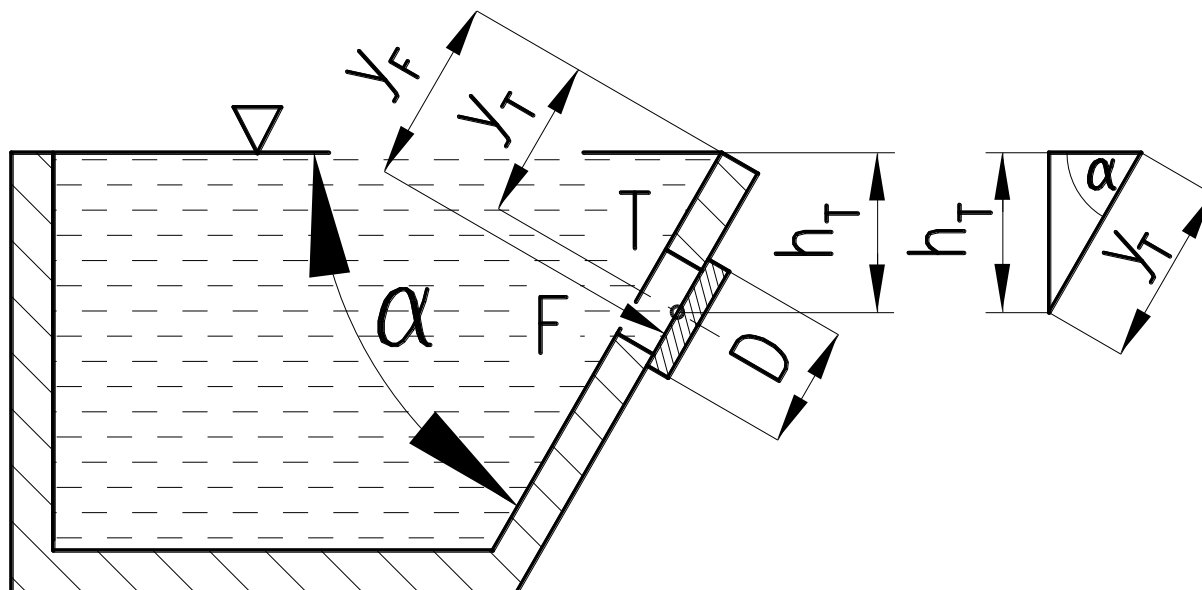
Polohu výslednice určíme buď jako vzdálenost těžiště zatěžovacího obrazce ($\Delta = \frac{2}{3}h$) nebo jako:

$$y_F = y_T + \frac{J_x}{S \cdot y_T}$$

Tlaková síla F je vždy kolmá na stěnu.

Př.: V šikmé stěně $\alpha = 60^\circ$ je ve vzdálenosti $y_T = 2\text{ m}$ od hladiny otvor uzavřený víkem o $\varnothing D = 1\text{ m}$.

Určete velikost síly, kterou působí tlak vody na víko a polohu této síly.



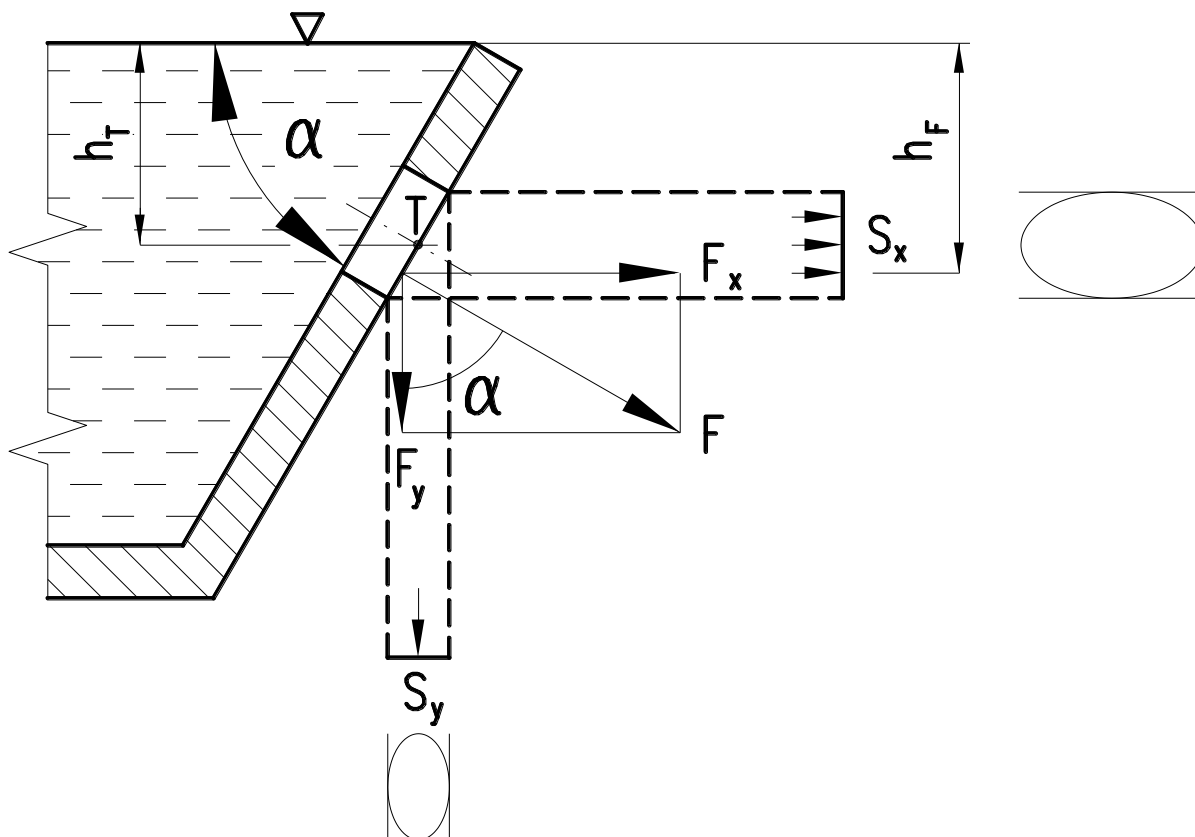
$$\sin \alpha = \frac{h_T}{y_T} \rightarrow h_T = y_T \cdot \sin \alpha$$

$$F = S \cdot p_{hT} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h_T \cdot \rho \cdot g = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot y_T \cdot \sin \alpha \cdot \rho \cdot g =$$

$$= \frac{\pi \cdot 1^2}{4} \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1000 \cdot 10 = 13603,5\text{ N}$$

$$y_F = y_T + \frac{J_x}{S \cdot y_T} = 2 + \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{64}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot 2} = 2 + \frac{1^2}{32} = 2,03\text{ m}$$

Nebo: Řeším zvlášť směr **x** jako tlak na svislou stěnu a směr **y** jako tíhu kapaliny na vodorovnou stěnu.
Pak výsledky spojím.



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F_x = S_x \cdot p_{hT} = S_x \cdot h_T \cdot \rho \cdot g$$

$$F_y = G = V \cdot \rho \cdot g = S_y \cdot \rho \cdot g \cdot h_T$$

S_x – průmět plochy do svislé roviny;

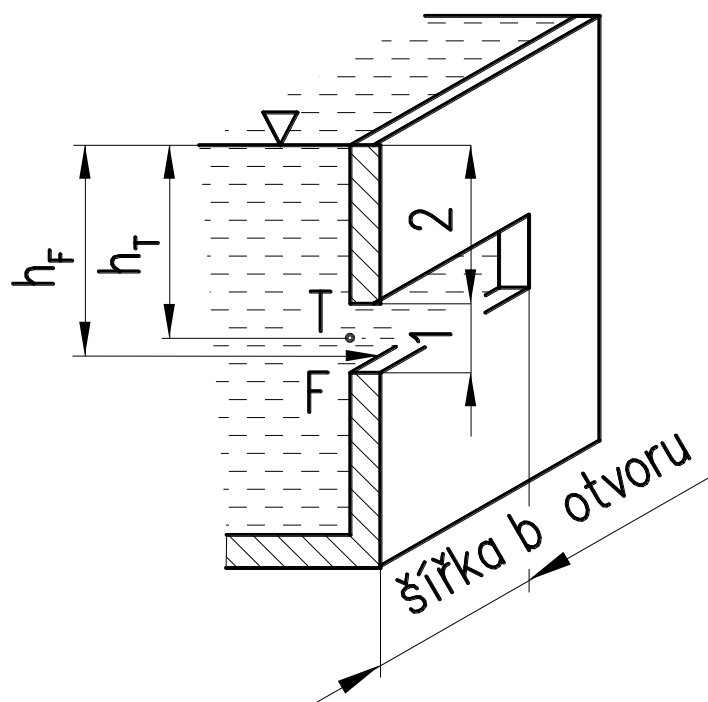
S_y – průmět plochy do vodorovné roviny;

h_T – vzdálenost těžiště plochy od hladiny.

$$h_F = h_T + \frac{J_x}{S \cdot h_T}, \quad J_{\text{xobdélíku}} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot a_x^3,$$

$$S_x = a_x \cdot b = a \cdot \cos \alpha \cdot b$$

Př.: Ve svislé stěně 2 m pod hladinou je obdélníkový otvor výšky 1 m a šířky 1,5 m. Určete velikost výsledné síly a její polohu.



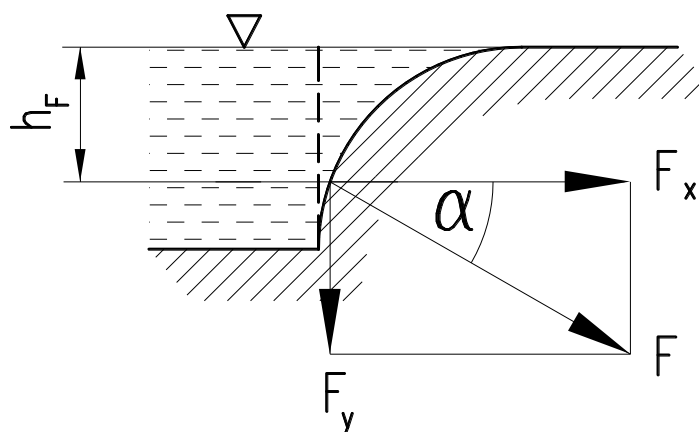
$$F = S \cdot p_{hT} = a \cdot b \cdot h_T \cdot \rho \cdot g =$$

$$= 1 \cdot 1,5 \cdot 2,5 \cdot 1000 \cdot 10 = 37500 \text{ N}$$

$$h_F = h_T + \frac{J_x}{S \cdot h_T} = h_T + \frac{\frac{b \cdot a^3}{12}}{a \cdot b \cdot h_T} =$$

$$= 2,5 + \frac{\frac{1,5 \cdot 1^3}{12}}{1,5 \cdot 1 \cdot 2,5} = 2,5333 \text{ m}$$

4.1.1.5.5 Tlak kapaliny na zakřivenou stěnu



Vodorovná složka F_x je stejně velká jako by tlak kapaliny působil na průmět zakřivené plochy do svislé roviny.

$$F_x = S_x \cdot p_{hT} = S_x \cdot h_T \cdot \rho \cdot g$$

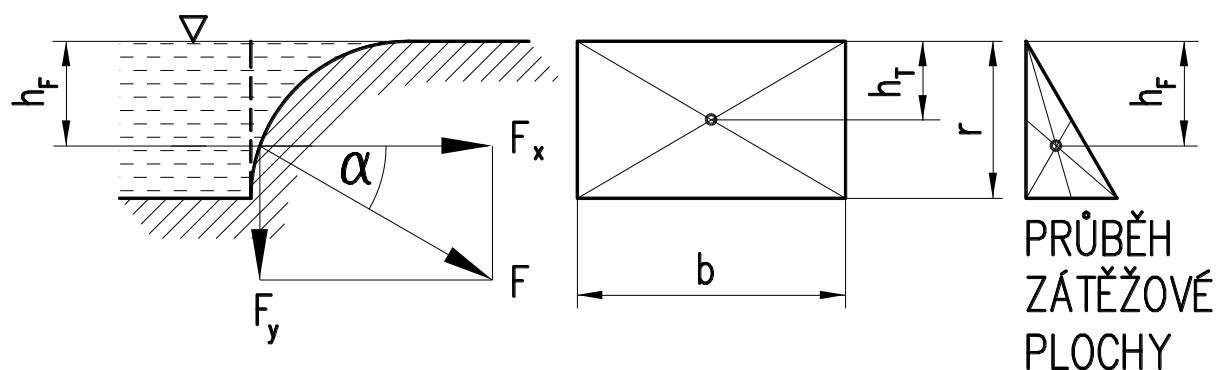
Svislá složka F_y je rovna tíze kapaliny nad plochou:

$$F_y = G = V \cdot \rho \cdot g$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F} \rightarrow \alpha \text{ nebo } \tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \alpha$$

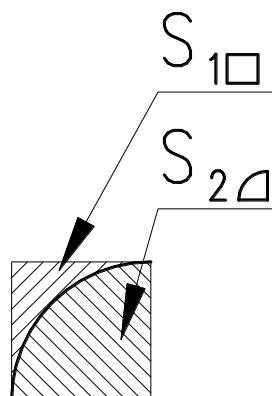
Př.: Určete velikost a směr síly, kterou působí voda na zakřivenou stěnu tvaru $\frac{1}{4}$ válce o poloměru $r = 2$ m a šířce $b = 2,5$ m.



$$F_x = S_x \cdot p_{hT} = r \cdot b \cdot h_T \cdot \rho \cdot g = 2 \cdot 2,5 \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 10 = 50000 \text{ N}$$

$$F_y = G = V \cdot \rho \cdot g = S \cdot b \cdot \rho \cdot g = (S_1 - S_2) \cdot b \cdot \rho \cdot g = \left(r \cdot r - \frac{\pi \cdot r^2}{4} \right) \cdot b \cdot \rho \cdot g =$$

$$= \left(2 \cdot 2 - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \right) \cdot 2,5 \cdot 1000 \cdot 10 = 21460 \text{ N}$$

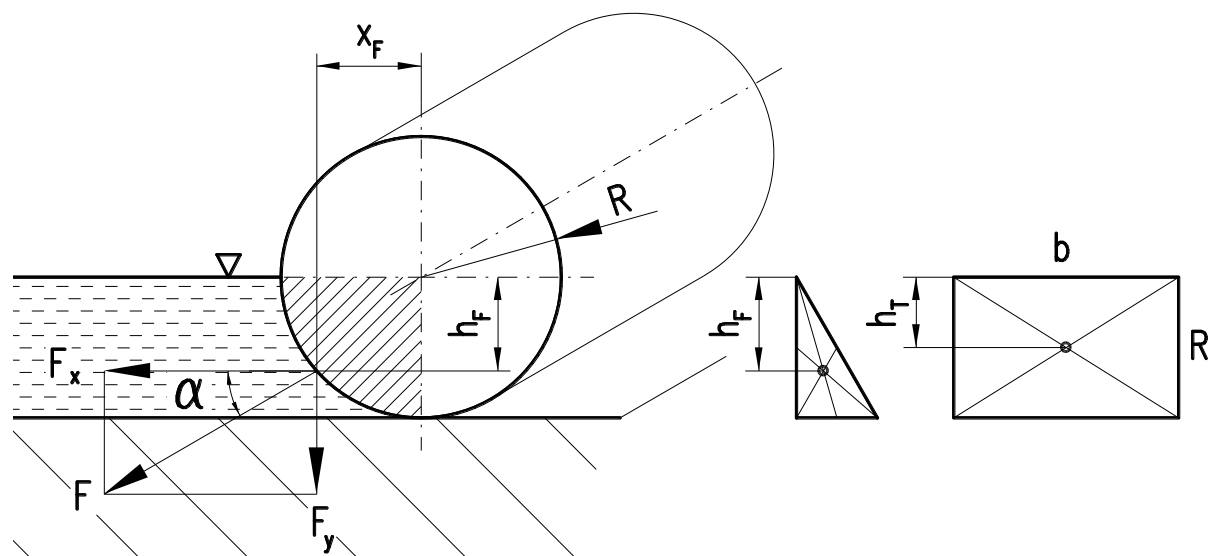


$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{50000^2 + 21460^2} = 54411 \text{ N}$$

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \alpha = 23^\circ 13'$$

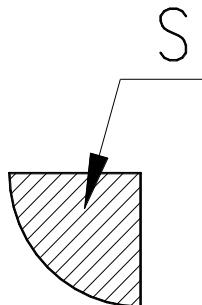
$$h_F = \frac{2}{3} \cdot r = \frac{2 \cdot 2}{3} = 1,33 \text{ m (zátěžová plocha je } \Delta \text{)}$$

Př.: Určete tlak kapaliny a sílu, kterou působí voda na válec o průměru 4 m a délky $b = 4$ m; $R = 2$ m.



$$F_x = S_x \cdot p_{hT} = R \cdot b \cdot \overbrace{h_T}^{R/2} \cdot \rho \cdot g = 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 10 = 80000 \text{ N}$$

$$F_y = G = V \cdot \rho \cdot g = S \cdot b \cdot \rho \cdot g = \frac{\pi \cdot R^2}{4} \cdot 4 \cdot 1000 \cdot 10 = 125664 \text{ N}$$



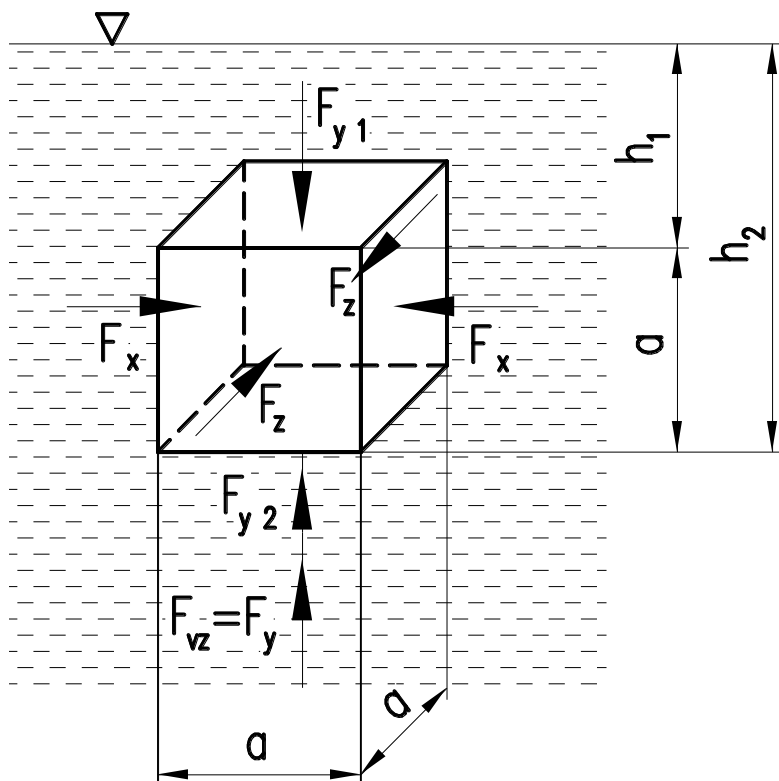
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{80000^2 + 125664^2} = 148968 \text{ N}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \alpha = 57^\circ 30'$$

$$y_F = \frac{2}{3} \cdot R = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ m}$$

4.1.1.6 Hydrostatický vztlak

Těleso ponořené do kapaliny je vystaveno tlaku kapaliny. Předpokládáme těleso ve tvaru krychle o stěně a .



Síly F_x se vzájemně ruší:

$$F_x = S \cdot p_{hT} = a^2 \cdot (h_T \cdot \rho \cdot g)$$

Podobně F_z .

Zdola působí síla:

$$F_{y2} = S \cdot p_{hT} = a^2 \cdot h_2 \cdot \rho \cdot g$$

Shora působí:

$$F_{y1} = S \cdot p_{hT} = a^2 \cdot h_1 \cdot \rho \cdot g$$

Vztlak:

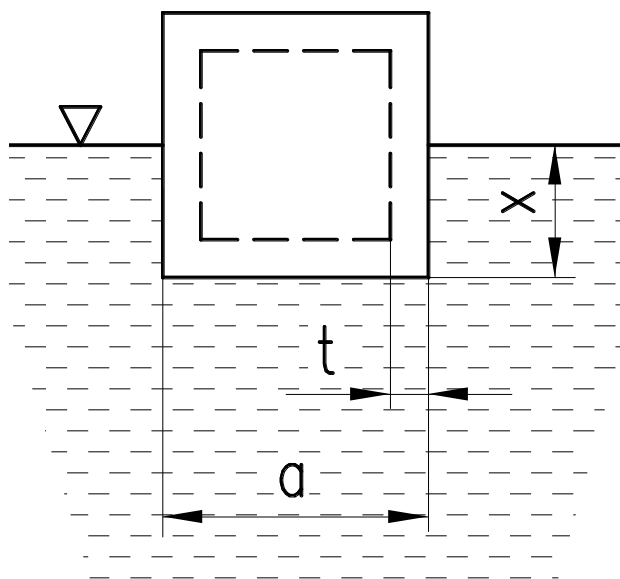
$$\begin{aligned} F_{vz} = F_y &= F_{y2} - F_{y1} = \\ &= a^2 \cdot h_2 \cdot \rho \cdot g - a^2 \cdot h_1 \cdot \rho \cdot g = \\ &= (h_2 - h_1) \cdot a^2 \cdot \rho \cdot g = a \cdot a^2 \cdot \rho \cdot g = \\ &= a^3 \cdot \rho \cdot g = V_{krychle} \cdot \rho_{vody} \cdot g \end{aligned}$$

4.1.1.6.1 Archimédův zákon

Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou rovnající se tíze kapaliny tělesem vytlačené.

Působíště vztlakové síly je v těžišti objemu vytlačené kapaliny.

Př.: Na hladině plave krychle zhotovená z ocelového plechu tloušťky $t = 5 \text{ mm}$. Strana krychle je $a = 500 \text{ mm}$. Určete hloubku ponoru.



$$F_{vz} = V \cdot \rho_{H_2O} \cdot g = a^2 \cdot x \cdot \rho_{H_2O} \cdot g$$

$$G = V \cdot \rho_{Fe} \cdot g = [a^3 - (a - 2t)^3] \cdot \rho_{Fe} \cdot g = (0,5^3 - 0,49^3) \cdot 7850 \cdot 10 = 577 \text{ N}$$

$$F_{vz} = G$$

$$a^2 \cdot x \cdot \rho_{H_2O} \cdot g = 577$$

$$x = \frac{577}{0,5^2 \cdot 1000 \cdot 10} = 0,231 \text{ m}$$

4.1.1.6.2 Plavání těles

Na těleso tíhy G působí vztlačková síla $F_{vz} = V \cdot \rho \cdot g$

V – objem ponořené části.

Je-li:

$G = F_{vz}$ – těleso se vznáší v kapalině.

$G > F_{vz}$ – těleso klesá ke dnu.

$G < F_{vz}$ – těleso se pohybuje k hladině.

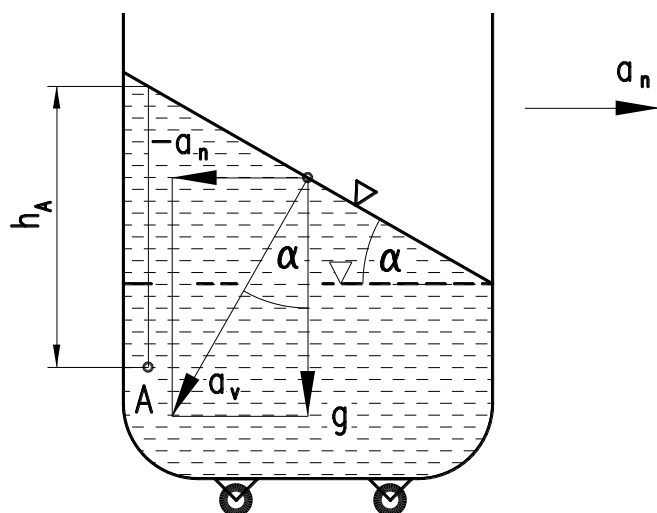
Vystupuje-li nad hladinu, vztlačková síla se zmenšuje, až nastane rovnováha.

4.1.1.6.3 Relativní rovnováha kapalin

Pohybuje-li se nádoba s kapalinou unášivým pohybem, je kapalina vzhledem k nádobě v tzv. relativní rovnováze.

a) **Unášivý pohyb přímočarý:** pohybuje-li se nádoba s kapalinou přímočarým rovnoměrným pohybem ($v = \text{konst.}$), působí na kapalinu pouze gravitační zrychlení a hladina kapaliny zůstává vodorovná.

Pohybuje-li se nádoba rovnoměrně zrychleným pohybem přímočarým ($a = \text{konst.}$), působí na částice kapaliny kromě tíhového zrychlení i opačně orientované unášivé zrychlení.



$$p_{hA} = h_A \cdot \rho \cdot g$$

$$a_v = \sqrt{a_n^2 + g^2}$$

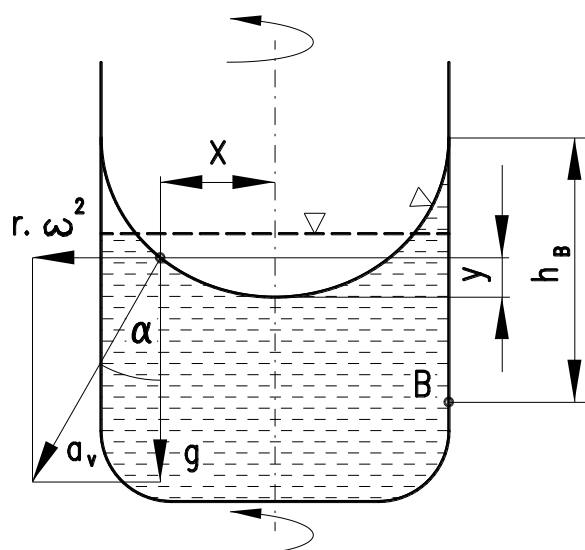
$$\tan \alpha = \frac{a_n}{g} \rightarrow \alpha$$

Hladina kapaliny v nádobě je pak kolmá na výsledné zrychlení. Hydrostatický tlak v libovolném místě kapaliny je závislý na svislé vzdálenosti sledovaného místa od volné hladiny.

b) **Unášivý pohyb rotační:** Pokud se nádoba pohybuje rovnoměrným rotačním pohybem ($\omega = \text{konst.}$, $n = \text{konst.}$), působí na jednotlivé částice kapaliny kromě gravitačního zrychlení i opačně orientované unášivé (dostředivé) zrychlení.

$$a_u = a_n = r \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

Úhlová rychlost ω je pro libovolný bod nádoby konstantní, dostředivé zrychlení je proto přímo úměrné poloměru kružnice a hladina v nádobě zaujme tvar povrchu rotačního paraboloidu.



$$a_v = \sqrt{g^2 + a_n^2}, \quad a_n = r \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{r}, \quad \tan \alpha = \frac{r \cdot \omega^2}{g}$$

Na libovolném poloměru je volná hladina kolmá na směr výsledného zrychlení.

Hydrostatický tlak kapaliny v libovolném bodě:

$$p_B = h_B \cdot \rho \cdot g$$

Výška bodu od horní hladiny:

$$y = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2 \cdot g}$$

y – svislá souřadnice od vrcholu paraboly.

Př.: Určete sklon výsledného zrychlení hladiny kapaliny na průměru 400 mm, jestliže nádoba koná

$$n = 1 \frac{ot}{s}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 6,28 \frac{ot}{s}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{g} = \frac{r \cdot \omega^2}{g} = \frac{0,2 \cdot 6,28^2}{10} = 0,788$$

$$\alpha = 38^\circ$$

4.2 Hydrodynamika

Je část hydromechaniky, která se zabývá pohybem nestlačitelných tekutin – kapalin a jejich působením na tuhá tělesa při vzájemném relativním pohybu.

Pohyb skutečných kapalin je obecně složitý. Pro snazší vyjádření zákonitosti pohybu sledujeme proudění ideální kapaliny. Za ideální kapalinu považujeme dokonale tekutou a nestlačitelnou kapalinu bez vnitřního tření, která nepodléhá změnám teploty. Pro skutečné kapaliny upravujeme odvozené zákony korigujícími členy a součiniteli, které se obvykle určují experimentálně na základě měření.

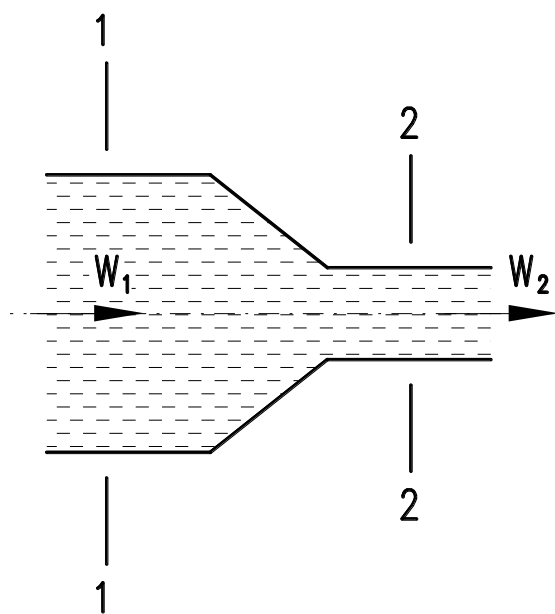
4.2.1 Ustálený tok ideální kapaliny

Pohyb tekutin se obecně řídí stejnými zákony jako pohyb těles. Ustálený tok ideální tekutiny se řídí zásadně dvěma rovnicemi.

a) **Rovnice spojitosti toku** – vyjadřuje zákon zachování hmoty.

b) **Rovnice pohybová – Bernoulliova** – vyjadřuje zákon zachování energie.

4.2.2 Rovnice spojitosti toku



Za předpokladu celistvého potrubí je hmotnostní průtok libovolným průřezem potrubí konstantní.

Ze zákona zachování hmoty: hmotnostní tok na vstupu = hmotnostní tok na výstupu.

Objemový průtok:

$$Q_V = S \cdot w \quad \left[\frac{m^3}{s} \right];$$

S – plocha $[m^2]$;

w – rychlost proudící tekutiny $\left[\frac{m}{s} \right]$;

ρ – měrná hmotnost $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$.

Hmotnostní tok:

$$Q_m = Q_V \cdot \rho = S \cdot w \cdot \rho$$

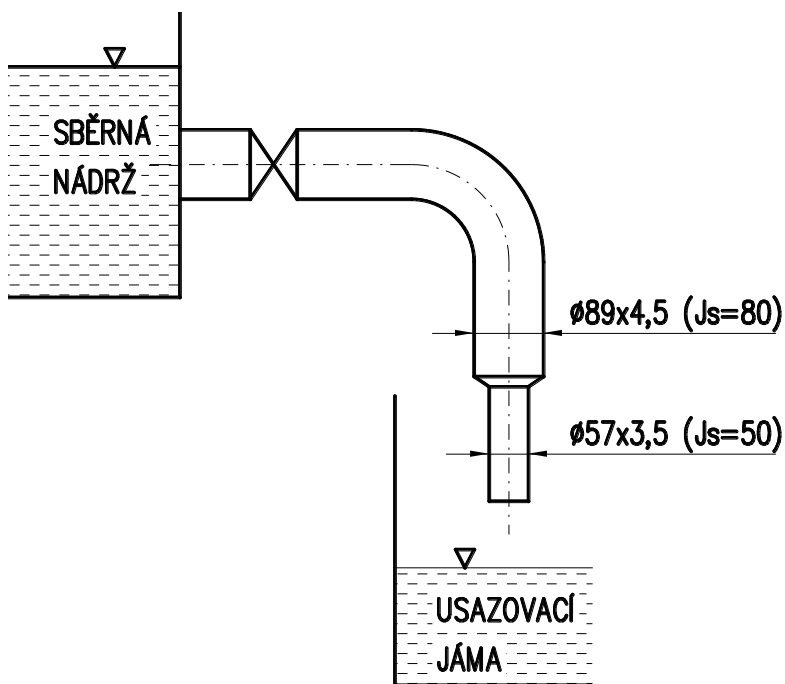
U ideální kapaliny, která je nestlačitelná, předpokládáme, že $\rho = konst \rightarrow Q = konst$

$$Q_{m1} = Q_{m2} = konst$$

$$S_1 \cdot w_1 \cdot \rho_1 = S_2 \cdot w_2 \cdot \rho_2 = konst$$

$$\boxed{S_1 \cdot w_1 = S_2 \cdot w_2 = konst}$$

Př.: Odkalovací potrubí je svařeno z bezešvých trubek a připojeno na sběrnou nádrž. Z nádrže se odvádí 30 m^3 vody za hodinu. Kalová voda má $\rho = 1,04 \text{ kg/litr}$. Určete hmotnostní tok, rychlost v potrubí je-li světlost $J_s = 80 \text{ mm}$, rychlost v trubce $J_s = 50 \text{ mm}$ a čas potřebný k odvedení 1 tuny vody.



$$Q_v = 30 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$Q_v = S \cdot w$$

$$Q_m = \frac{Q_v \cdot \rho}{3600} = \frac{30 \cdot 1040}{3600} = 8,7 \text{ kg/s}$$

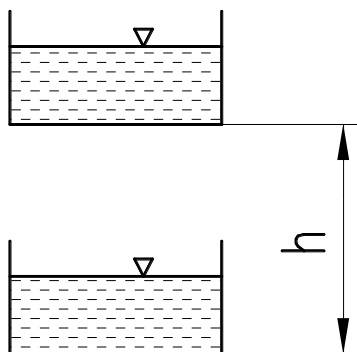
$$Q_v = S_1 \cdot w_1 \rightarrow w_1 = \frac{Q_v}{S_1} = \frac{30}{3600 \cdot \frac{\pi \cdot 0,08^2}{4}} = 1,66 \text{ m/s}$$

$$Q_v = S_2 \cdot w_2 \rightarrow w_2 = \frac{Q_v}{S_2} = \frac{30}{3600 \cdot \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4}} = 4,24 \text{ m/s}$$

$$t = \frac{1000}{8,7} = 114,94 = 1,92 \text{ min}$$

4.2.3 Bernoulliho rovnice

U proudící kapaliny rozlišujeme polohovou, tlakovou a pohybovou energii.

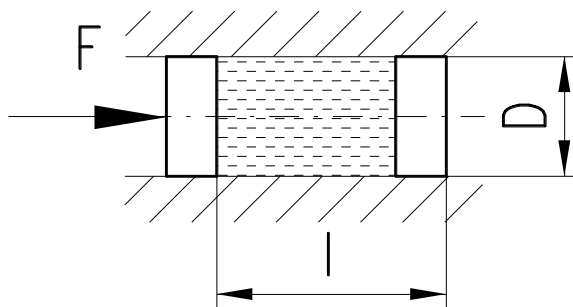


Polohová energie (potenciální, tíhová):

$$E_g = G \cdot h = m \cdot g \cdot h \quad [\text{J}]$$

Pro 1 kg:

$$e_g = \frac{E_g}{m} = g \cdot h \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$



Tlaková energie: Je to schopnost konat práci.

Vztah pro tlakovou energii si odvodíme jako práci spotřebovanou k pohybu pístu na dráze l.

$$A = E_p = F \cdot l = p \cdot S \cdot l = p \cdot V = E_p$$

$$m = V \cdot \rho \rightarrow V = \frac{m}{\rho} \quad E_p = m \cdot \frac{p}{\rho} \quad [\text{J}]$$

$$\text{Pro 1 kg: } e_p = \frac{E_p}{m} = \frac{p \cdot V}{m} = \frac{p \cdot \frac{m}{\rho}}{m} = \frac{p}{\rho} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

Energie pohybová – kinetická:

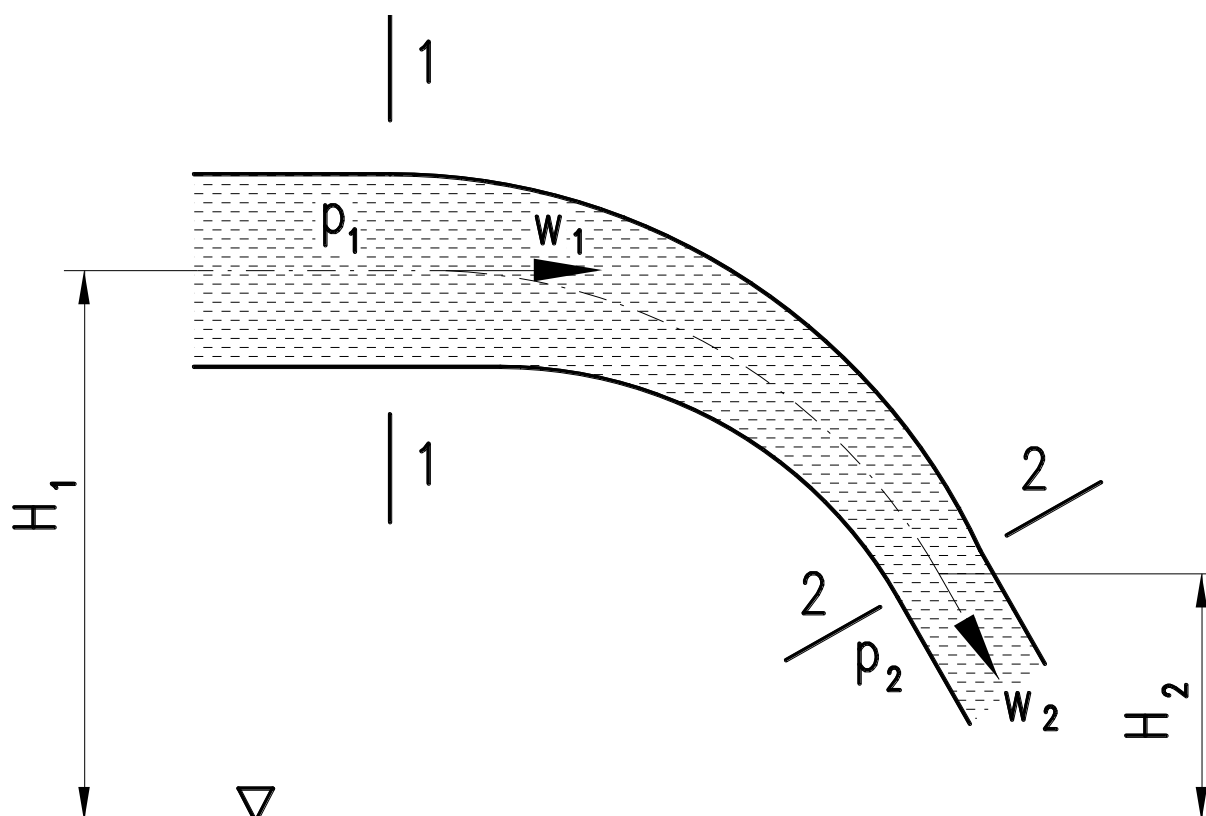
$$E_K = \frac{1}{2} m \cdot w^2$$

Pro 1 kg:

$$e_K = \frac{E_K}{m} = \frac{\frac{1}{2} w^2 \cdot m}{m} = \frac{w^2}{2} \left[\frac{J}{kg} \right]$$

Bernoulliova rovnice je matematickým vyjádřením zákona zachování energie pro proudící tekutiny.

Energie se neztrácí ani nevzniká, pouze se přeměňuje z jedné formy na druhou.



$$E_g + E_p + E_K = konst.$$

$$e_g + e_p + e_K = konst.$$

Základní Bernoulliova rovnice (pro 1 kg):

$$g \cdot H_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot H_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}$$

Bernoulliovu rovnici můžeme použít v několika různých tvarech:

$$E_C = E_g + E_p + E_K = konst.$$

$$m \cdot g \cdot H_1 + m \cdot \frac{p_1}{\rho} + \frac{m \cdot w_1^2}{2} = m \cdot g \cdot H_2 + m \cdot \frac{p_2}{\rho} + \frac{m \cdot w_2^2}{2}$$

Pro 1 m^3 má Bernoulliova rovnice tvar ($m = V \cdot \rho$):

$$V \cdot \rho \cdot g \cdot H_1 + V \cdot \rho \cdot \frac{p_1}{\rho} + \frac{V \cdot \rho \cdot w_1^2}{2} = V \cdot \rho \cdot g \cdot H_2 + V \cdot \rho \cdot \frac{p_2}{\rho} + \frac{V \cdot \rho \cdot w_2^2}{2}$$

$$\boxed{\rho \cdot g \cdot H_1 + p_1 + \rho \cdot \frac{w_1^2}{2} = \rho \cdot g \cdot H_2 + p_2 + \rho \cdot \frac{w_2^2}{2}}$$

$H \cdot \rho \cdot g$ – hydrostatický tlak p_h ;

$p_1 = p_{V1}$ – vnější tlak;

$\rho \cdot \frac{w^2}{2} = p_{D1}$ – dynamický tlak p_D ;

$p_h + p_v$ – statický tlak p_s ;

$p_s + p_d = p_c$ – celkový tlak.

Při průtoku 1 m^3 ideální nestlačitelné tekutiny zůstává celkový tlak tekutiny neměnný a je v každém průřezu stejný. Dochází pouze k přeměně forem energie 1 m^3 protékající tekutiny. Bernoulliova rovnice má pak tvar:

$$p_{h1} + p_1 + p_{d1} = p_{h2} + p_2 + p_{d2}$$

Při výpočtu vodních strojů se používá Bernoulliova rovnice ve formě výšek. Získáme ji tak, že rovnici pro 1 kg tekutiny podělíme gravitačním zrychlením g .

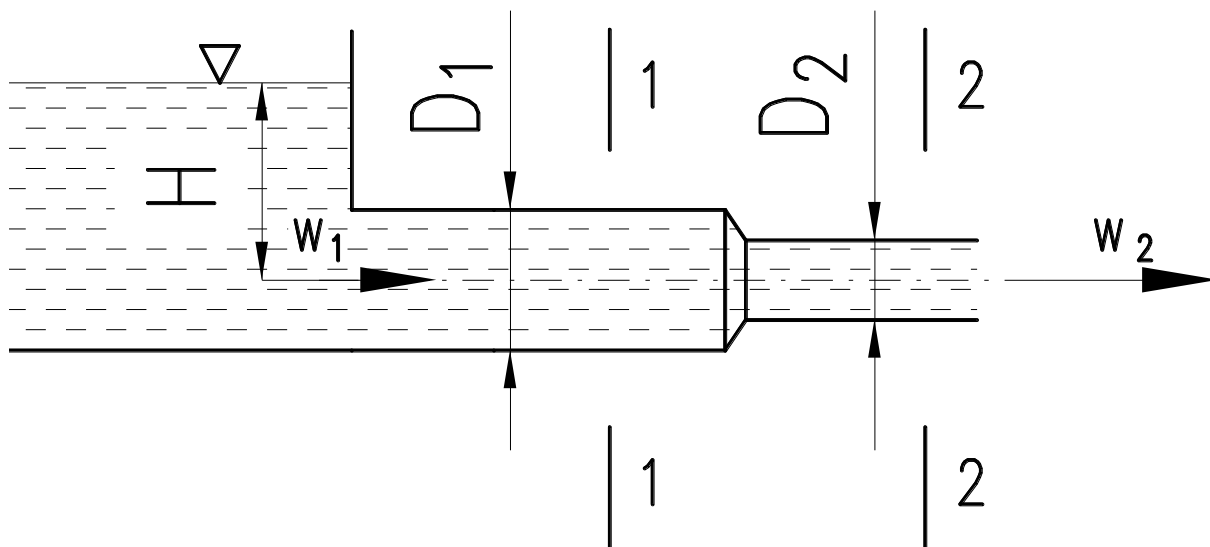
$$H_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{w_1^2}{2 \cdot g} = H_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{w_2^2}{2 \cdot g}$$

$\frac{w^2}{2 \cdot g}$ = rychlostní výška;

H = geodetická výška;

$\frac{p}{\rho \cdot g}$ = tlaková výška.

Př.: Určete tlak a rychlost v průřezu 1 – 1 potrubí a objemový průtok potrubím, které je zakončeno tryskou $\varnothing D_2 = 80 \text{ mm}$, $\varnothing D_1 = 100 \text{ mm}$, $H = 3 \text{ m}$. $Q_V = ?$, $w_1 = ?$, $w_2 = ?$



$$e_g + e_p + e_k = \text{konst.}$$

$$g \cdot H_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot H_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}$$

Mezi hladinou a výtokovým otvorem 2 – 2 dle Bernoulliovy rovnice platí:

$$g \cdot H + \frac{p_b}{\rho} + 0 = g \cdot 0 + \frac{p_b}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}$$

$$g \cdot H = \frac{w_2^2}{2}$$

$$w_2^2 = 2 \cdot g \cdot H$$

$$w_2 = \sqrt{2g \cdot H} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 3} = 7,75 \text{ m/s}$$

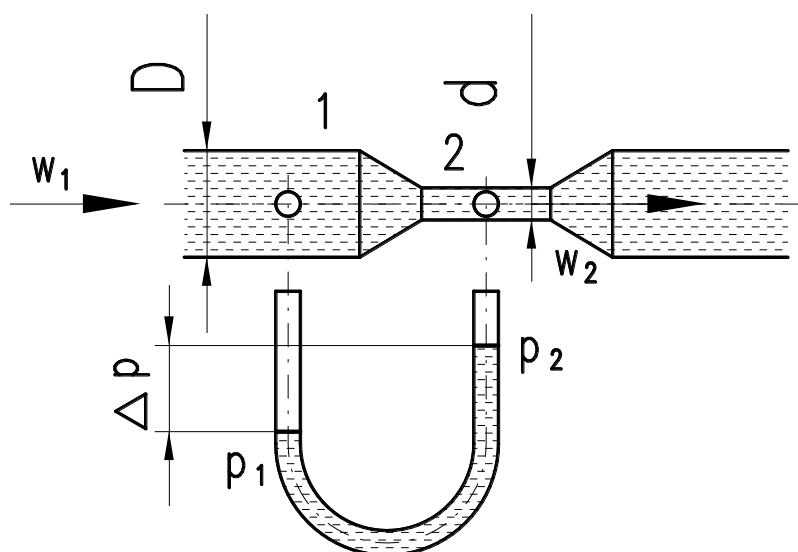
Z rovnice spojitost toku: $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$

$$w_1 = \frac{S_2 \cdot w_2}{S_1} = \frac{\pi \cdot \frac{D_2^2}{4} \cdot w_2}{\pi \cdot \frac{D_1^2}{4}} = \frac{\pi \cdot \frac{0,08^2}{4} \cdot 7,75}{\pi \cdot \frac{0,1^2}{4}} = 4,96 \text{ m/s}$$

$$Q_V = S_1 \cdot w_1 = S_2 \cdot w_2$$

$$Q_V = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot w_1 = \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot 4,96 = 0,0389 \text{ m}^3/\text{s} = 38,9 \text{ l/s}$$

Př.: K měření objemového průtoku se používá Venturiho trubice. Určete objemový průtok, jestliže Venturiho trubice má rozměry $D = 100 \text{ mm}$, $d = 80 \text{ mm}$, naměřeno $\Delta p = p_1 - p_2 = 100 \text{ Pa}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.



Z rovnice spojitosti toku:

$$Q_V = S_1 \cdot w_1 = S_2 \cdot w_2$$

$$w_1 = \frac{S_2}{S_1} w_2 = i \cdot w_2$$

$$i = \frac{S_2}{S_1} = \frac{d^2}{D^2} = \frac{80^2}{100^2} = 0,64$$

Z Bernoulliovy rovnice pro 1 kg látky platí:

$$g \cdot H_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot H_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}$$

$$H_1 = H_2$$

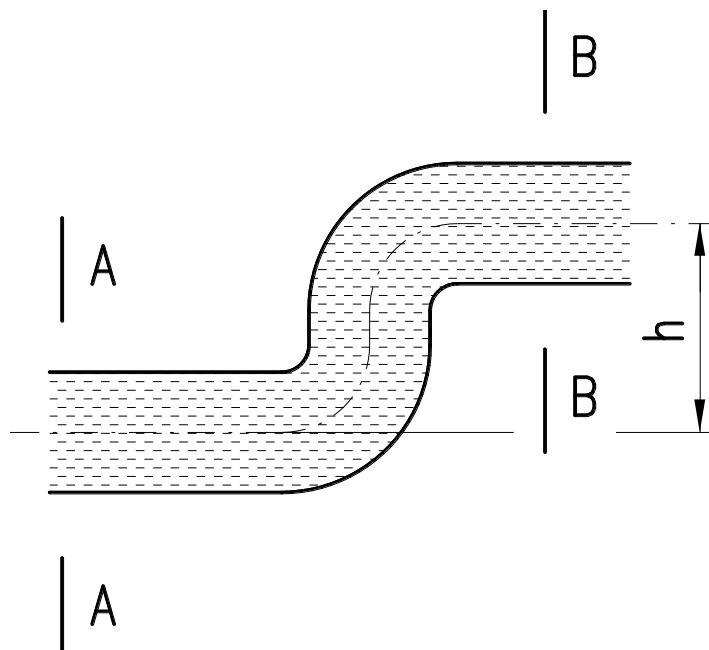
$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{w_2^2 - i \cdot w_2^2}{2} = \frac{w_2^2 \cdot (1 - i^2)}{2}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot (1 - i^2)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (1 - 0,64^2)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^2}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (1 - 0,64^2)}} = 0,582 \text{ m/s}$$

$$Q_V = S_2 \cdot w_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot w_2 = \frac{\pi \cdot 0,08^2}{4} \cdot 0,582 = 0,00293 \text{ m}^3/\text{s}$$

Př.: Potrubím konstantního průměru $d = 145 \text{ mm}$ je tlačena voda z průřezu A – A do průřezu B – B. Vypočítejte tlak p_B , je-li v průřezu A – A, tlak $p_A = 2,16 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ a výškový rozdíl $h = 3,6 \text{ m}$. Jakou rychlostí proudí voda, je-li objemový průtok $Q_V = 1,5 \text{ m}^3/\text{min} = 0,025 \text{ m}^3/\text{s}$?



Z Bernoulliovy rovnice pro 1 kg látky platí:

$$g \cdot H_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{w_A^2}{2} = g \cdot H_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{w_B^2}{2}$$

$$0 + \frac{p_A}{\rho} + \frac{w_A^2}{2} = g \cdot h + \frac{p_B}{\rho} + \frac{w_B^2}{2}$$

Z rovnice spojitosti toku:

$$S_A \cdot w_A = S_B \cdot w_B$$

$$S_A = S_B \rightarrow w_A = w_B$$

$$\frac{p_A}{\rho} = g \cdot h + \frac{p_B}{\rho}$$

$$p_B = p_A - h \cdot \rho \cdot g$$

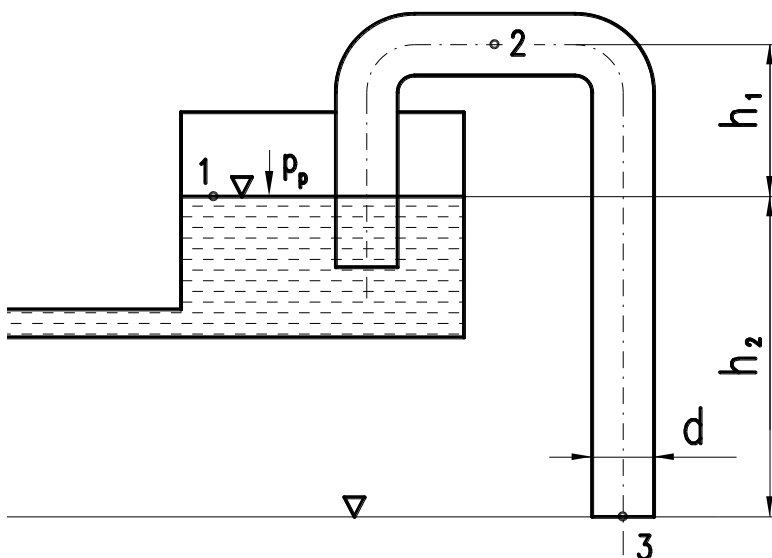
nebo

$$p_B = \rho \cdot \left(\frac{p_A}{\rho} - g \cdot h \right) = 1000 \cdot \left(\frac{2,16 \cdot 10^5}{1000} - 10 \cdot 3,6 \right) = 180\,000 \text{ Pa}$$

$$Q_V = S_1 \cdot w_1 = S_2 \cdot w_2 = S \cdot w = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot w$$

$$w = \frac{4 \cdot Q_V}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 1,5}{\pi \cdot 0,145^2} = 90,8 \text{ m/min} = 1,51 \text{ m/s}$$

Př.: Z nádoby vytéká voda násoskou o průměru $d = 60$ mm. V nádobě je udržována konstantní výška hladiny. Nad hladinou je udržován přetlak $p_p = 117,7$ kPa $= 0,1177$ MPa, $h_1 = 2$ m, $h_2 = 3$ m. Určete objemový průtok a tlak v nejvyšším bodě násosky, $p_b = 99$ kPa.



Z Bernoulliovy rovnice v bodech 1 – 3 pro 1 kg látky platí:

$$g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_3^2}{2}$$

$$g \cdot h_2 + \frac{(p_b + p_p)}{\rho} + 0 = 0 + \frac{p_b}{\rho} + \frac{w_3^2}{2}$$

$$w_3 = \sqrt{2 \cdot \left(g \cdot h_2 + \frac{p_p}{\rho} \right)} = \sqrt{2 \cdot \left(10 \cdot 3 + \frac{117,7 \cdot 10^3}{1000} \right)} = 17,19 \text{ m/s}$$

Objemový průtok:

$$Q_V = S_1 \cdot w_1 = S_2 \cdot w_2$$

$$Q_V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot w_3 = \frac{\pi \cdot 0,06^2}{4} \cdot 17,19 = 0,0486 \text{ m}^3/\text{s} = 48,6 \text{ l/s}$$

Tlak zjistíme z Bernoulliovy rovnice v bodech 1 – 2, platí:

$$d_2 = d_3 \rightarrow w_2 = w_3$$

$$g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}$$

$$0 + \frac{p_p + p_b}{\rho} + 0 = g \cdot h_1 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_3^2}{2}$$

$$p_2 = \rho \cdot \left(\frac{p_p + p_b}{\rho} - g \cdot h_1 - \frac{w_3^2}{2} \right) = 1000 \cdot \left(\frac{117,7 \cdot 10^3 + 99 \cdot 10^3}{1000} - 10 \cdot 2 - \frac{17,19^2}{2} \right) = 48952 \text{ Pa} \approx 49 \text{ kPa}$$

4.2.4 Ustálený tok skutečných tekutin

Proudění skutečných tekutin (kapalin, plynů) potrubním je vždy provázeno ztrátami mechanické energie. Část mechanické energie proudu tekutiny se vlivem tření a víření tekutiny přemění bez užítu v tepelnou energii, kterou již nedokážeme přeměnit. Tento jev se v termomechanice nazývá **škrceň**. Při škrceň kapalin vyšších teplot blízko bodu varu a reálných plynů teplota klesá, u kapalin nižších teplot se přeměna ztracené mechanické energie projeví jen nepatrným zvýšením teploty.

$$g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + e_z$$

4.2.5 Vazkost tekutin

Proudí-li skutečná tekutina, proti jejímu pohybu působí vnitřní tření tekutiny tzv. **vazkost**.

Je-li tekutina v klidu, vazkost se neprojevuje. Vzdušiny mají malou vazkost, naopak kapaliny, zejména některé (olej, dehet, glycerin), jsou velmi vazké.

Při pohybu skutečných tekutin vznikají následkem vazkosti vnitřní tekutiny tečné síly (napětí) mezi jednotlivými vrstvami, čímž dochází ke vzájemnému ovlivňování pohybu. U stěn v tzv. mezní vrstvě se tekutina nepohybuje, rychlost je nulová.

Mírou vazkosti je **dynamická viskozita – η** [éta] $[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$

Dynamická viskozita se nemění se změnou tlaku, naopak značně závisí na teplotě. U kapalin s rostoucí teplotou klesá, u plynů s rostoucí teplotou roste. Při ohřátí jsou proto kapaliny řidší, plyny viskóznější.

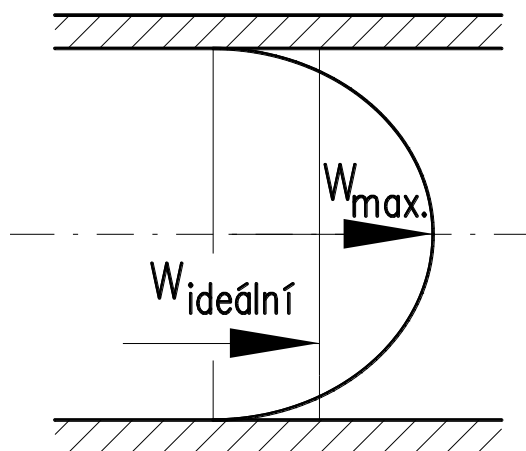
Kinematická viskozita $\nu = \frac{\eta}{\rho} [m^2 \cdot s^{-1}]$ [ný] je odvozená veličina. Závisí na změně teploty, u plynů

i na změně tlaku. S tlakem roste hustota plynů, kinematická viskozita klesá.

4.2.6 Proudění skutečné tekutiny

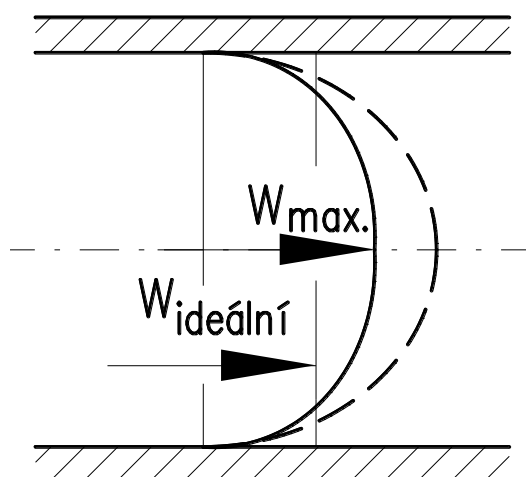
Může být:

a) Laminární (vláknové):



Proudnice – dráhy, po kterých se pohybují jednotlivé elementy, jsou navzájem rovnoběžné. V různé vzdálenosti od osy potrubí se jednotlivé elementy pohybují různými rychlostmi. Největší rychlost je v ose potrubí. Rychlost je rozložena podle paraboly. V praxi se s tímto prouděním setkáváme při proudění vazkých tekutin malou rychlostí $w_{\max} = 2 \cdot w_{\text{ideální}}$

b) Turbulentní:



Při překročení určité rychlosti proudění tekutiny se proudnice začnou vzájemně prolínat.

$$w_{\max} = 1,2 \cdot w_{\text{ideální}}$$

Druh proudění posuzujeme podle Reynoldsova čísla

$$R_e = \frac{w \cdot d}{\nu} \text{ [bezrozměrné číslo]}$$

w – rychlost proudění;

d – průměr;

ν – kinematická viskozita;

$R_e < 2320$ – laminární proudění;

$R_e > 10000$ – turbulentní proudění;

$2320 < R_e < 10000$ – přechodné proudění.

4.2.7 Hydraulické ztráty

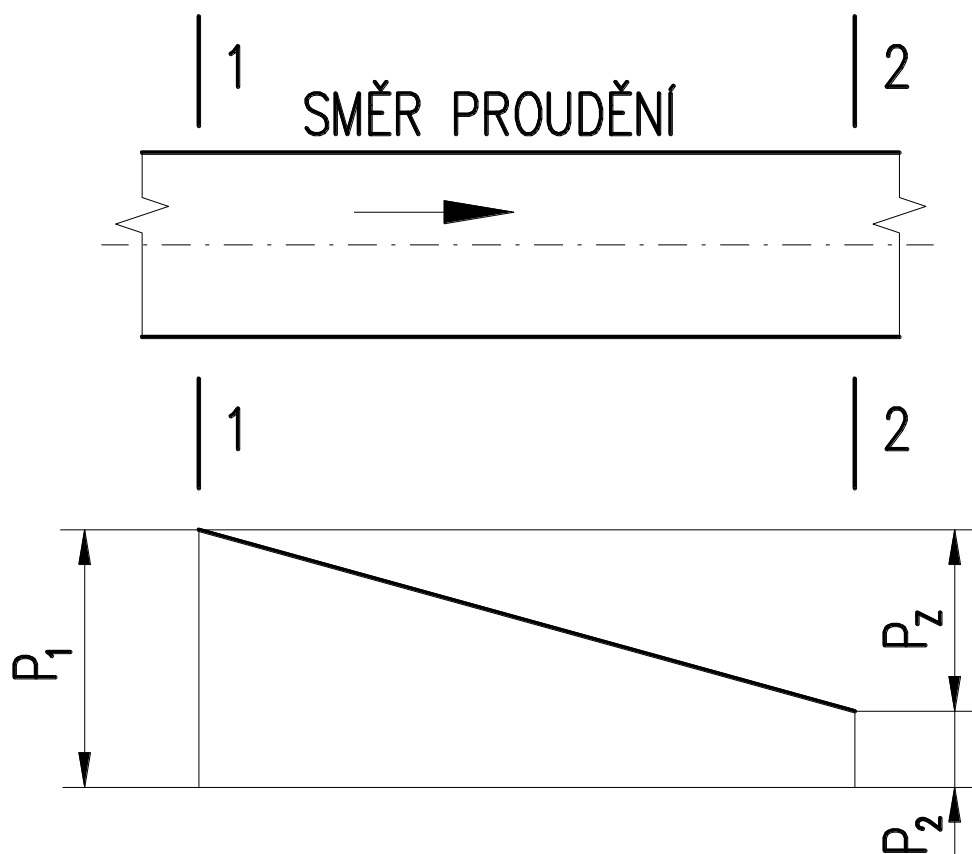
Hydraulické ztráty vznikající při proudění tekutin dělíme podle příčin vzniku:

a) ztráty způsobené **třením tekutiny o stěny potrubí**;

b) ztráty **místními vlivy** (vřazenými odpory), za které považujeme **jakékoliv změny směru proudění a jakékoliv změny průřezu**.

4.2.8 Ztráty způsobené třením tekutiny o stěny potrubí

Při průtoku ideální tekutiny zůstává tlak ve vodorovném potrubí konstantní. Při průtoku skutečných kapalin vodorovným potrubím konstantního průřezu je tlak v průřezu 2 – 2 menší než v průřezu 1 – 1.



Tlaková ztráta je dána rozdílem tlaků ve vstupním průřezu 1 – 1 a výstupním průřezu 2 – 2:

$$p_1 - p_2 = p_z$$

Dynamický tlak: $p_D = \rho \cdot \frac{w^2}{2}$

$$p_z = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \overbrace{\frac{w^2}{2} \cdot \rho}^{p_D} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot p_D$$

Tato tlaková ztráta je úměrná délce potrubí a dynamickému tlaku proudu a nepřímo úměrná světlosti potrubí.

λ – odporový součinitel, který je závislý na druhu proudění.

Laminární: $\lambda_l = \frac{64}{Re}$

Turbulentní: $\lambda_t = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$

Př.: Potrubím světlosti 20 mm proudí rychlostí $v = 3 \text{ m/s}$ olej teploty 50°C . Určete hodnotu odporového součinitele λ a velikost tlakové ztráty, je-li délka potrubí $l = 20 \text{ m}$; $\rho = 928 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; dynamická viskozita $\eta = 0,22 [\text{kg/m} \cdot \text{s}]$.

Kinematická viskozita:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{0,22}{928} = 0,000237 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$R_e = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{3 \cdot 0,02}{0,000237} = 253,16 \rightarrow \text{laminární proudění}$$

$$\text{Odporový součinitel: } \lambda_l = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{253,16} = 0,2528 [-]$$

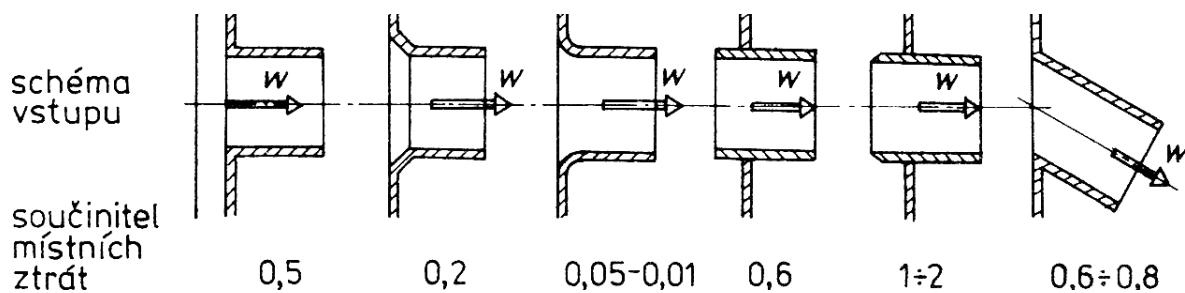
$$\text{Tlaková ztráta: } p_z = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \overbrace{\frac{w^2}{2}}^{p_D} \cdot \rho = 0,2528 \cdot \frac{20}{0,02} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot 928 = 1055\,692,8 \text{ Pa} \doteq 1,1 \text{ MPa}$$

4.2.9 Ztráty místními odpory (změna průřezu, směru)

$$p_z = \xi \cdot p_D = \xi \cdot \rho \cdot \frac{w^2}{2}$$

ξ – [ksí] **součinitel místního vlivu** (ztrát). Závisí na Reynoldsově čísle R_e , druhu ztráty, drsnosti potrubí a rozložení rychlosti při proudění. Určuje se měřením na zkušebnách.

Součinitel místních ztrát při vstupu do potrubí:



Součinitel místních ztrát změnou průřezu:

změna průřezu	rozšíření								zúžení							
	pozvolné				náhlé				pozvolné				náhlé			
náčrt																
—	$\delta [^\circ]$				$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$				$\delta [^\circ]$				$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$			
součinitel místních ztrát ξ	5°	10°	20°	30°	1,5	2	2,5	3	30°	45°	60°		0,1	0,2	0,4	0,8
	0,05	0,25	0,5	0,7	0,25	1	2,2	4	0,02	0,04	0,07		0,45	0,38	0,33	0,15

Průtok skutečných kapalin potrubím počítáme pomocí dvou rovnic:

$$S_1 \cdot w_1 = S_2 \cdot w_2$$

$$g \cdot H_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot H_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + e_z$$

$$e_z - \text{energie ztrátová}, \quad e_z = \frac{p_z}{\rho} = g \cdot H_z$$

Ztrátová energie je dána součtem ztrát třením kapaliny a ztrát způsobených místními vlivy.

$$p_z = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \xi \right) \cdot p_D = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \xi \right) \cdot \rho \cdot \frac{w^2}{2}$$

$$e_z = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \xi \right) \cdot \frac{w^2}{2}$$

Př.: Vypočítejte úbytek tlaku Δp_z a ztrátovou výšku h_z v potrubí o průměru $D = 150$ mm, jestliže potrubím protéká objemové množství $Q_V = 3,55$ l/s (dm³/s) vody, délka potrubí $l = 80$ m, kinematická viskozita [ný] $\nu = 10^{-6}$ m²/s; $\Delta p_z = ?$, $h_z = ?$

$$Q_V = S_1 \cdot w_1 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot w_1 \rightarrow$$

$$w_1 = \frac{4 \cdot Q_V}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 3,55}{\pi \cdot 0,15^2} = 2 \text{ dm/s} = 0,2 \text{ m/s}$$

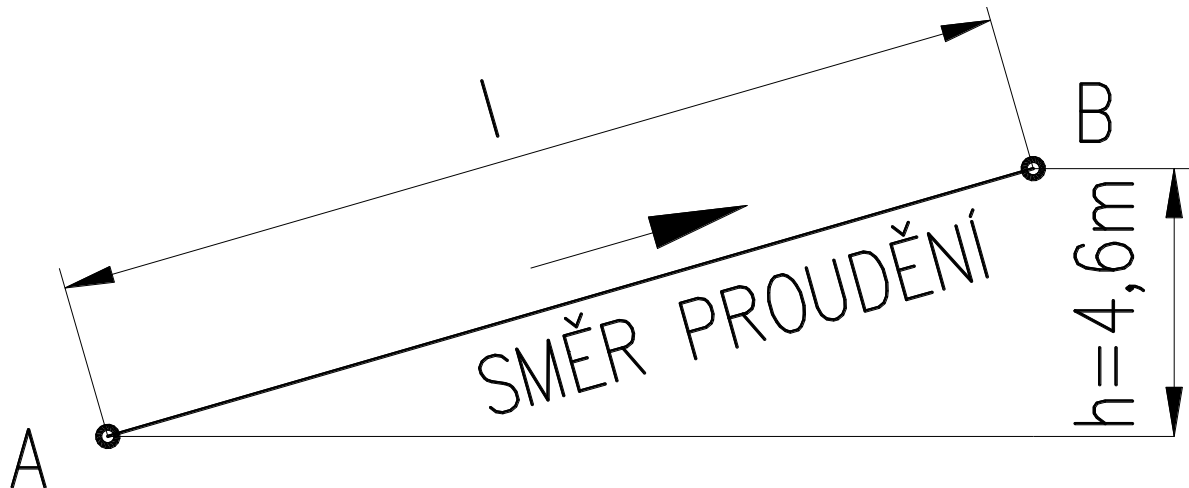
$$R_e = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{0,2 \cdot 0,15}{10^{-6}} = 30\,000 \rightarrow \text{turbulentní proudění}$$

$$\lambda_t = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{30000}} = 0,024$$

$$\Delta p_z = \rho \cdot \lambda_t \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2} = 1000 \cdot 0,024 \cdot \frac{80}{0,15} \cdot \frac{0,2^2}{2} = 256 \text{ Pa}$$

$$e_z = g \cdot h_z = \frac{p_z}{\rho} \rightarrow h_z = \frac{p_z}{g \cdot \rho} = \frac{256}{10 \cdot 1000} = 0,0256 \text{ m}$$

Př.: Vypočítejte tlak v místě A potrubí konstantního průměru $d = 150 \text{ mm}$, kterým proudí voda rychlostí $w = 0,8 \text{ m/s}$. Kinematická viskozita [ný] $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Délka potrubí $l = 560 \text{ m}$. Svislá vzdálenost bodů A – B = 4,6 m. Tlak v místě B $p_B = 225,3 \text{ kPa}$, $w = \text{konst.}$ $p_A = ?$



$$R_e = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{0,8 \cdot 0,15}{10^{-6}} = 120\,000 \rightarrow \text{turbulentní proudění}$$

$$\lambda_t = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{R_e}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{120000}} = 0,017$$

$$e_z = \frac{p_z}{\rho} = \frac{\lambda \cdot l}{d} \cdot \frac{w^2}{2} = \frac{0,017 \cdot 560}{0,15} \cdot \frac{0,8^2}{2} = 20,3 \text{ J/kg}$$

$$g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + e_z$$

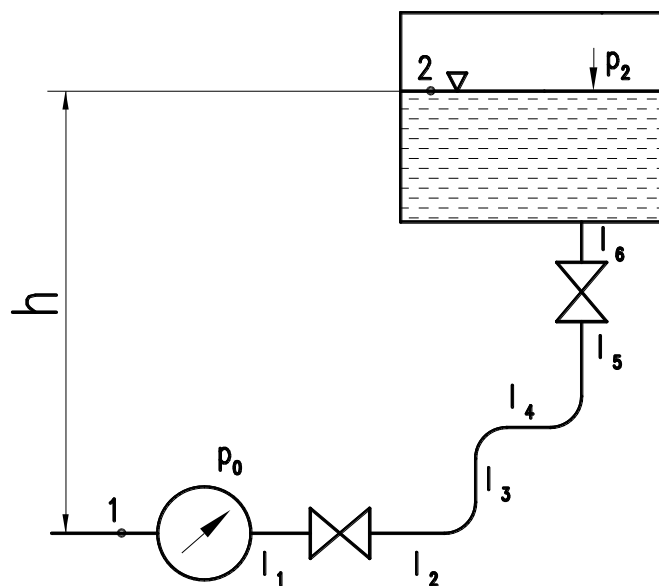
D = konstanta, proto $w_A = w_B$

$$\frac{p_A}{\rho} = g \cdot (h_B - h_A) + \frac{p_B}{\rho} + e_z$$

$$p_A = \rho \cdot g \cdot \overbrace{(h_B - h_A)}^h + p_B + \rho \cdot e_z = \rho \cdot g \cdot h + p_B + \rho \cdot e_z = \\ = 1000 \cdot 10 \cdot 4,6 + 225300 + 1000 \cdot 20,3 = 291600 \text{ Pa} = 291,6 \text{ kPa}$$

Př.: Určete tlak p_0 , který musí vyvodit čerpadlo dopravující vodu do nádrže, ve které je nad hladinou tlak $p_2 = 333,5 \text{ kPa}$ potrubím o průměru $d = 50 \text{ mm}$ a celkové délce $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 = 500 \text{ m}$. Svislá vzdálenost hladiny vody v nádrži od čerpadla $h = 28 \text{ m}$, rychlost proudění vody

$w = 72 \text{ m/min}$. V potrubí jsou 2 ventily $\xi_1 = 5$ a 3 pravouhlá kolena $\xi_2 = 0,25$; kinematická viskozita $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Rychlost na hladině zanedbejte.



$$h = 28 \text{ m}$$

$$\sum l = 500 \text{ m}$$

$$d = 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m}$$

$$p_2 = 333,5 \text{ kPa}$$

$$w = 72 \text{ m/min} = 1,2 \text{ m/s}$$

$$e_z = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \xi \right) \cdot \frac{w^2}{2}$$

$$g \cdot H_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot H_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + e_z$$

$$Re = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{1,2 \cdot 0,05}{10^{-6}} = 60000 \rightarrow \text{turbulentní proudění}$$

$$\lambda_t = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{60000}} = 0,020$$

$$e_z = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + 2\xi_1 + 3\xi_2 \right) \cdot \frac{w^2}{2} = \left(0,02 \cdot \frac{500}{0,05} + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0,25 \right) \cdot \frac{1,2^2}{2} = 151,74 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$0 + \frac{p_0}{10^3} + \frac{1,2^2}{2} = 10 \cdot 28 + \frac{333500}{10^3} + \frac{0}{2} + \overbrace{151,74}^{e_z}$$

$$p_o = (280 + 333,5 + 151,74 - 0,72) \cdot 10^3 = 764520 \text{ Pa} = 0,765 \text{ MPa}$$

4.2.10 Ustálený tok skutečných kapalin

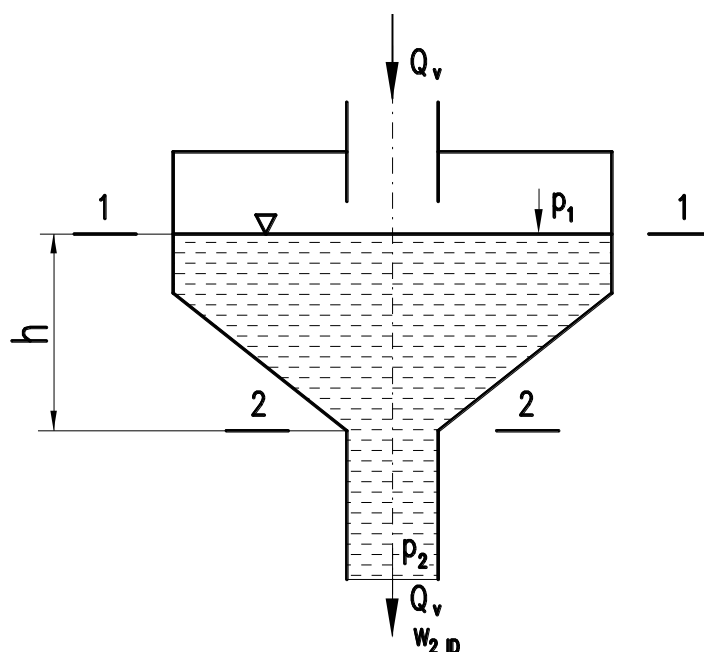
Ustálený výtok kapaliny nastává, jestliže z nádoby vytéká právě tolik kapaliny, kolik do ní přitéká.

Volná hladina kapaliny v nádrži zůstává stále na stejné výši.

Ustálený výtok ideální kapaliny můžeme odvodit z Bernoulliho rovnice.

Ideální výtaková rychlost:

Použijeme Bernoulliho rovnici v bodech 1 – 2:



$$g \cdot H_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot H_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_{2id}^2}{2}$$

$$g \cdot h + \frac{p_1}{\rho} + 0 = 0 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_{2id}^2}{2}$$

$$w_{2id} = \sqrt{2 \cdot \left(g \cdot h + \frac{(p_1 - p_2)}{\rho} \right)}$$

za předpokladu, že $p_1 = p_2$ platí:

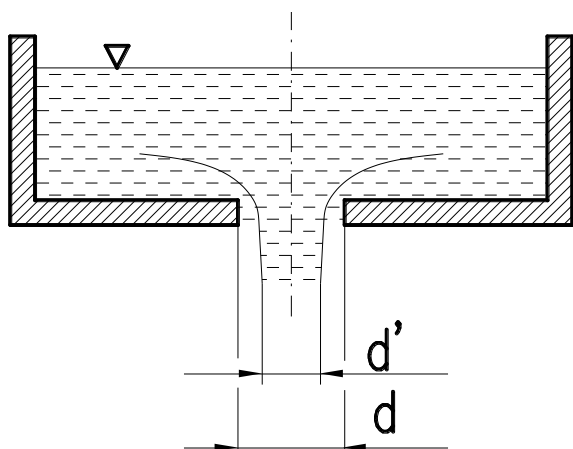
$$w_{2id} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

U skutečných kapalin je vlivem vnitřního tření kapaliny skutečná výtaková rychlost menší, než výtaková rychlost ideální kapaliny (vlivem tření, ...).

$$w_2 = \varphi \cdot w_{2id}$$

φ – rychlostní součinitel, $\varphi < 1$.

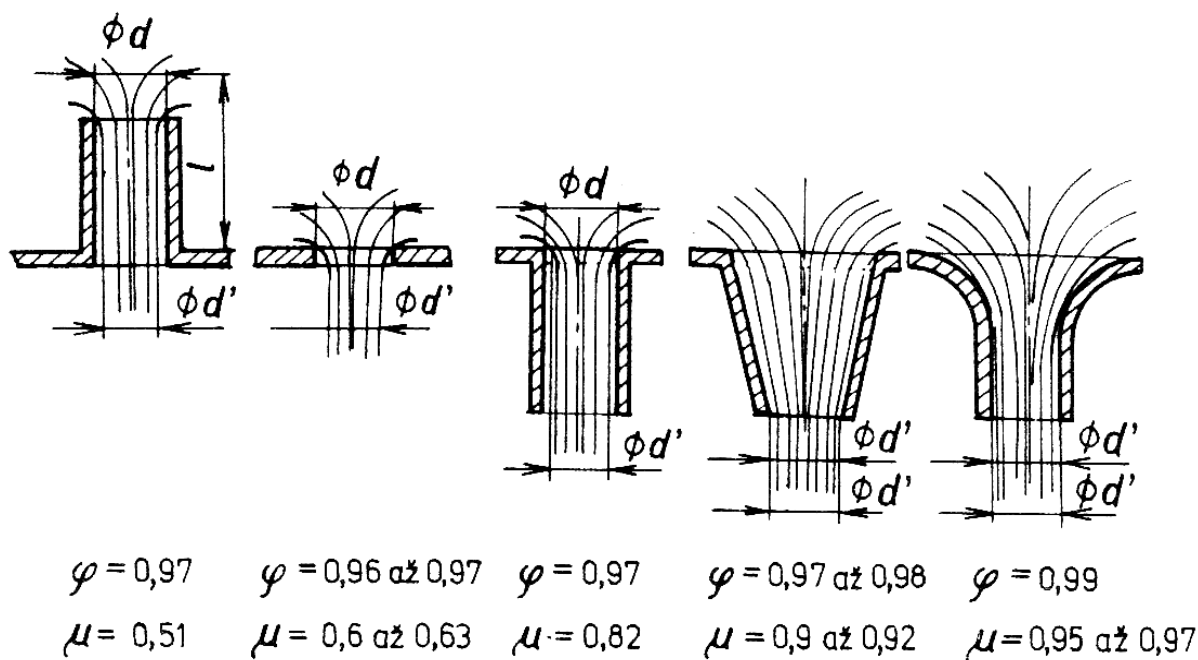
Rovněž dochází k zúžení průřezu proudu tekutiny vůči průřezu.



Součinitel kontrakce (zúžení průřezu):

$$\varepsilon = \frac{\frac{\pi \cdot d'^2}{4}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{d'^2}{d^2} = \varepsilon$$

Výtokový součinitel:



Objemový průtok:

$$\mu = \varepsilon \cdot \varphi$$

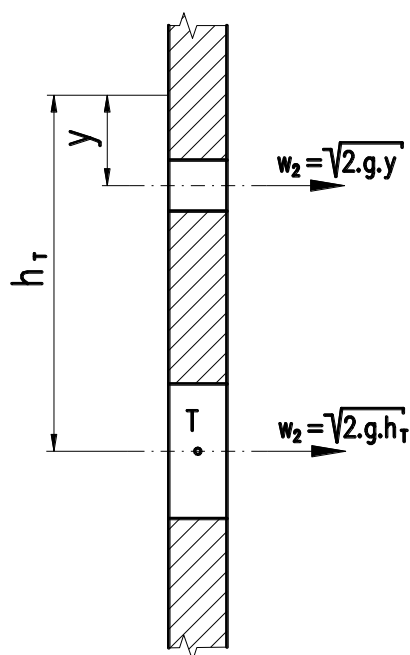
$$Q_v = S' \cdot w_2 = \overbrace{\varepsilon \cdot \varphi}^{\mu} \cdot S \cdot w_{2id} = \mu \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(g \cdot h + \frac{(p_1 - p_2)}{\rho} \right)}$$

(φ – rychlostní součinitel, μ – výtokový součinitel).

Př.: Určete, jaké množství vody vytéká malým otvorem $d = 20 \text{ mm}$, je-li výtokový součinitel $\mu = 0,82$, otvor je 1 m pod hladinou; $p_1 = p_2$.

$$Q_v = \mu \cdot S \cdot v = \mu \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(g \cdot h + \frac{(p_1 - p_2)}{\rho} \right)} = 0,82 \cdot \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1} = 0,00115 \text{ m}^3/\text{s}$$

4.2.11 Ustálený výtok kapaliny otvorem boční stěnou nádoby



Vztah pro výtakovou rychlost ideální kapaliny můžeme stejně jako v předchozím případě odvodit z Bernoulliovy rovnice:

$$w_2 = \sqrt{2 \cdot \left(g \cdot h + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \right)}$$

Pro $p_1 = p_2$:

$$w_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot y}$$

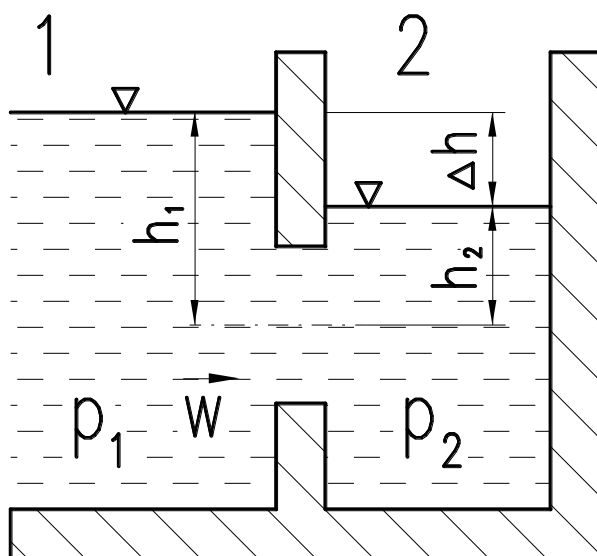
Výtaková rychlost se mění s hloubkou otvoru pod hladinou y podle paraboly.

U malých otvorů je rozdíl v horní a dolní části výtakového otvoru minimální, proto pro výpočet používáme výtakovou rychlost, která odpovídá hloubce těžiště otvoru.

Objemový průtok:

$$Q_v = \mu \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_T} \quad (\mu - \text{výtakový součinitel}).$$

4.2.12 Výtok kapaliny ponořeným otvorem



Pokud je v oddělených nádobách 1 a 2 ve svislé stěně otvor, pak v libovolném bodě otvoru je stejný rozdíl tlaků Δp .

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_1 - p_2 = h_1 \cdot \rho \cdot g - h_2 \cdot \rho \cdot g = \\ &= (h_1 - h_2) \cdot \rho \cdot g = \Delta h \cdot \rho \cdot g \end{aligned}$$

Proto v celém průřezu otvoru bude stejná rychlost proudění: $w = \sqrt{2g \cdot \Delta h}$

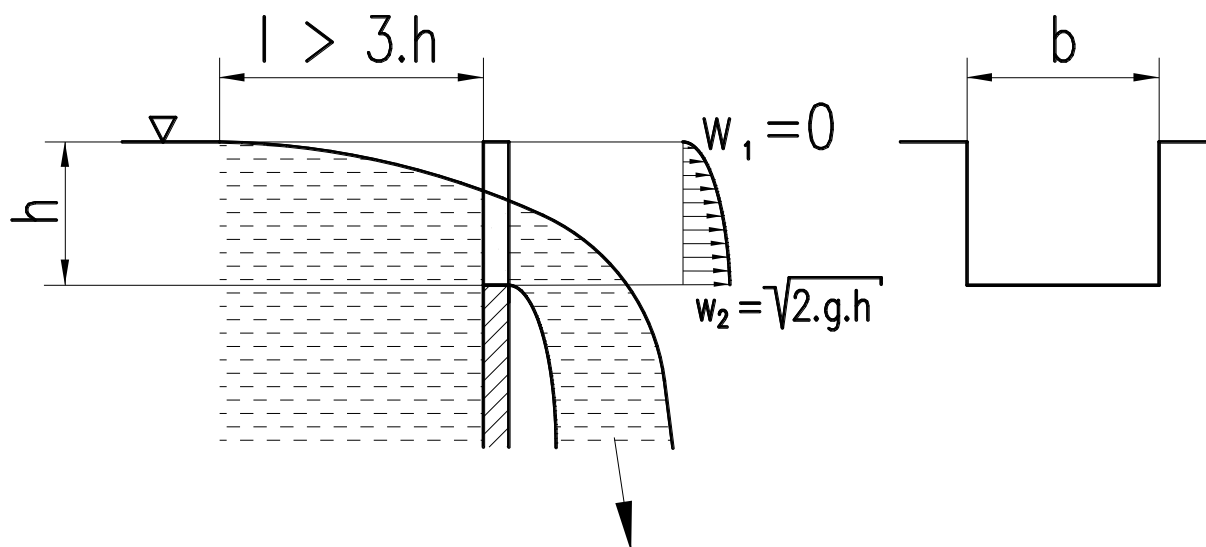
Objemový průtok:

$$Q_v = \mu \cdot S \cdot \sqrt{2g \cdot \Delta h}$$

μ – výtakový součinitel.

4.2.13 Výtok kapaliny velkým obdélníkovým otvorem sahajícím k hladině

Přepad přes jez:



Vzhledem k tomu, že výtoková rychlost se s hloubkou mění podle paraboly, teoreticky je rychlost v úrovni hladiny = 0, největší je na koruně jezu. Z vlastností paraboly vyplývá, že střední rychlost proudění je ve 2/3 paraboly. Výšku vody nad korunou jezu bereme ve vzdálenosti $l > 3h$.

Objemový průtok:

$$Q_v = S \cdot \frac{2}{3} \cdot w_2 \cdot \mu = \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{2gh}$$

b – šířka jezu;

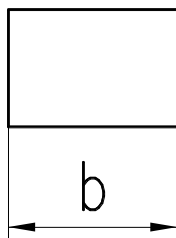
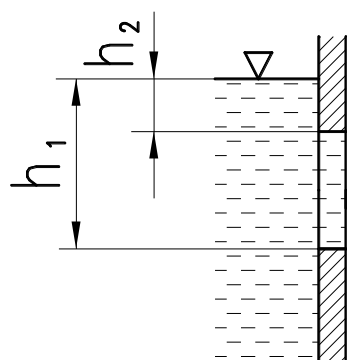
h – výška hladiny nad korunou jezu;

μ – výtokový součinitel.

Př.: Určete, jaké množství vody protéká řekou, je-li šířka jezu $b = 10$ m a výška hladiny $h = 0,2$ m, výtokový součinitel $\mu = 0,92$.

$$Q_v = S \cdot \frac{2}{3} \cdot w_2 \cdot \mu = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \overbrace{b \cdot h}^S \cdot \overbrace{\sqrt{2gh}}^w = \frac{2}{3} \cdot 0,92 \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{2g \cdot 0,2} = 2,453 \text{ m}^3/\text{s}$$

4.2.14 Výtok velkým obdélníkovým otvorem pod hladinou

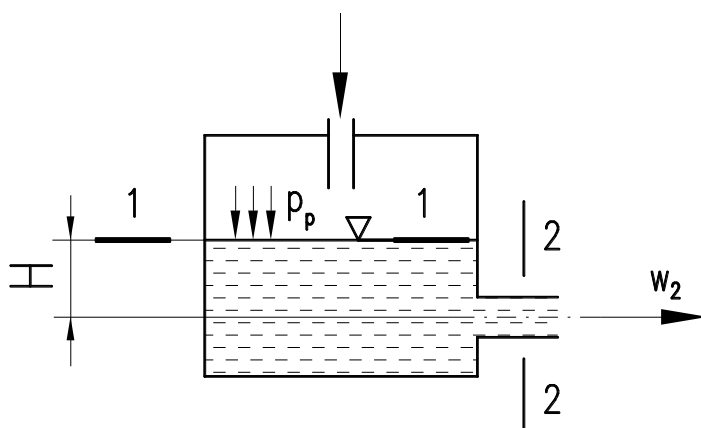


Řešíme jako rozdíl 2 případů přes jez:

$$Q_v = \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{2g \cdot h}$$

$$\begin{aligned} Q_v &= Q_{v1} - Q_{v2} = \\ &= \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot h_1 \cdot \sqrt{2g \cdot h_1} - \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot h_2 \cdot \sqrt{2g \cdot h_2} = \\ &= \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(h_1^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

Př.: Určete výtakovou rychlost vody, která vytéká z nádoby, ve které se udržuje stálá výška $h = 2 \text{ m}$ nad osou výtakového otvoru průřezu $S = 2,2 \text{ cm}^2 = 0,00022 \text{ m}^2$. Na hladinu kapaliny působí přetlak $p_p = 0,12 \text{ MPa}$. Rychlostní součinitel $\varphi = 0,82$, výtokový součinitel $\mu = 0,8$. Jaký je objemový průtok Q_v ? $w_2 = ?$



$$p_1 = p_b + p_p, \quad p_2 = p_b$$

$$g \cdot H_1 + \frac{\overbrace{p_1}^{p_b + p_p}}{\rho} + \frac{\overbrace{w_1^2}^{=0}}{2} = g \cdot H_2 + \frac{\overbrace{p_2}^{p_b}}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + \overbrace{e_z}^{\text{nezadáno}}$$

$$g \cdot H + \frac{p_b + p_p}{\rho} + 0 = g \cdot 0 + \frac{p_b}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}$$

$$g \cdot H + \frac{p_p}{\rho} + 0 = 0 + \frac{w_2^2}{2}$$

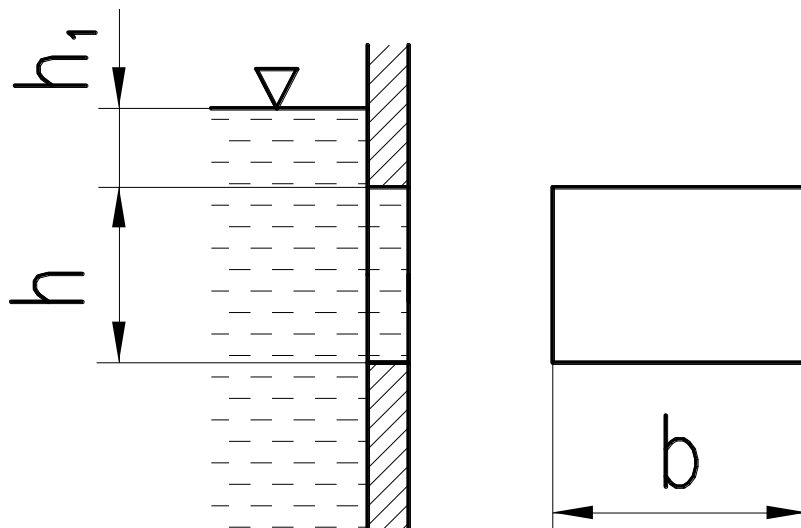
$$10 \cdot 2 + \frac{120000}{1000} = \frac{w_2^2}{2} \rightarrow$$

$$w_{2id} = \sqrt{40 + 240} = \sqrt{280} = 16,73 \text{ m/s}$$

$$w_2 = \varphi \cdot w_{2id} = 0,82 \cdot 16,73 = 13,72 \text{ m/s}$$

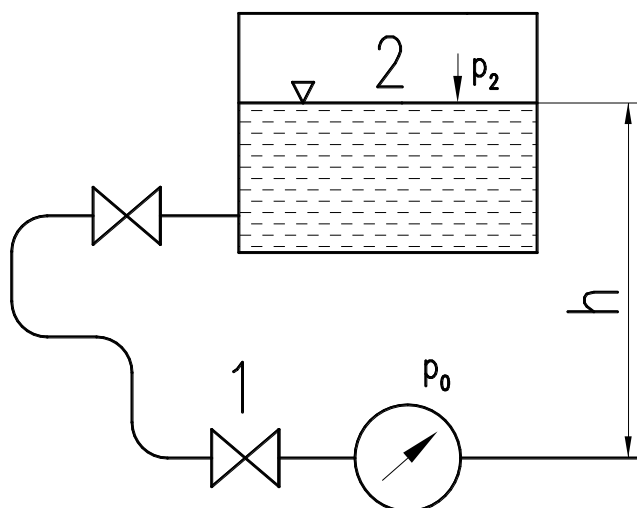
$$Q_v = S_2 \cdot w_2 \cdot \mu = 0,00022 \cdot 16,73 \cdot 0,8 = 0,00294 \text{ m}^3/\text{s} = 2,94 \text{ dm}^3/\text{s} = 2,94 \text{ l/s}$$

Př.: 1,5 m pod hladinou je velký obdélníkový otvor $b = 1 \text{ m}$, $h = 300 \text{ mm}$. Určete objemový průtok Q_V otvorem, je-li výtokový součinitel $\mu = 0,85$. $h_1 = 1,5 \text{ m}$.



$$Q_V = \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \sqrt{(h_1 + h)^3 - (h_1)^3} = \frac{2}{3} \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot \sqrt{2 \cdot 10} \cdot \sqrt{1,8^3 - 1,5^3} = 3,97 \text{ m}^3/\text{s}$$

Př.: Určete tlak p_o , který musí vyvodit čerpadlo dopravující vodu do nádrže, ve které je tlak $p_2 = 0,5 \text{ MPa}$, délka potrubí je 800 m , světlost $d = 60 \text{ mm}$, rychlost proudění $w = 1 \text{ m/s}$. V potrubí jsou zařazeny 2 ventily $\xi_1 = 5$ a 10 pravouhlých kolen $\xi_2 = 0,25$. Výškový rozdíl mezi hladinou nádrže a čerpadlem je $h = 40 \text{ m}$. $p_b = 1,05 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, kinematická viskozita $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Použijeme Bernoulliho rovnici v bodech 1 – 2:



$$g \cdot H_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot H_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + e_z$$

$$Re = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{1 \cdot 0,06}{10^{-6}} = 60000 \rightarrow \text{turbulentní proudění}$$

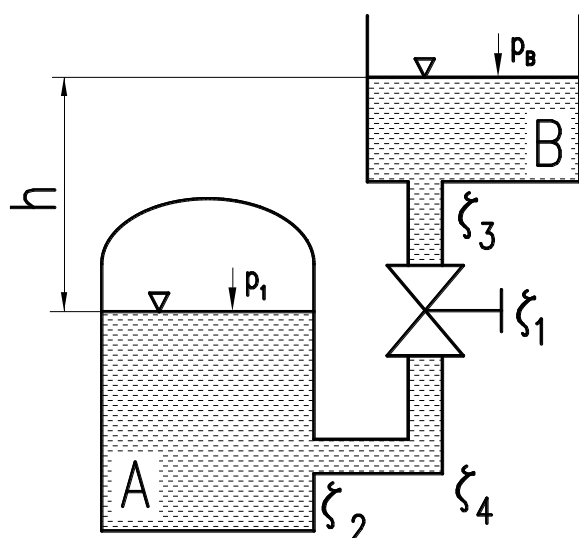
$$\lambda_t = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{60000}} = 0,02$$

$$e_z = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \xi_i \right) \cdot \frac{w^2}{2} = \left(0,02 \cdot \frac{800}{0,06} + 2 \cdot 5 + 10 \cdot 0,25 \right) \cdot \frac{1^2}{2} = 139,58 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$0 + \frac{p_0}{10^3} + \frac{1^2}{2} = 10 \cdot 40 + \frac{0,5 \cdot 10^5}{10^3} + 0 + 139,58$$

$$p_o = 1000 \cdot (400 + 500 - 0,5 + 139,58) = 1039 \, 080 \text{ Pa} = 1,039 \text{ MPa}$$

Př.: Z nádrže A je vytlačována voda do nádrže B svislým ocelovým potrubím o průměru $d = 50 \text{ mm}$, délky $l = 3 \text{ m}$. Rozdíl hladin v obou nádržích $h = 3,5 \text{ m}$. Určete velikost tlaku p_1 v nádobě A, který zajistí průtok $Q_v = 6 \text{ l/s}$ do horní nádrže B, $p_b = 98,1 \text{ kPa}$. Do potrubí je vřazen kohout $\xi_1 = 3,6$, součinitel tření $\lambda = 0,039$, odporový součinitel vtoku do potrubí $\xi_2 = 0,5$, do horní nádrže $\xi_3 = 1$, součinitel náhlé změny směru potrubí $\xi_4 = 1,1$.



$$Q_v = 6 \text{ l/s} = 6 \text{ dm}^3/\text{s} = 0,006 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_v = S_1 \cdot w_1 \rightarrow w_1 = \frac{Q_v}{S_1} = \frac{0,006 \cdot 4}{\pi \cdot 0,05^2} = 3,0557 \text{ m/s}$$

$$g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot H_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + e_z$$

$$e_z = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \xi_i \right) \cdot \frac{w^2}{2} =$$

$$= \left(0,039 \cdot \frac{3}{0,05} + 6,2 \right) \cdot \frac{3,0557^2}{2} = 39,87 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$0 + \frac{p_1}{\rho} + 0 = g \cdot h + \frac{p_b}{\rho} + 0 + e_z$$

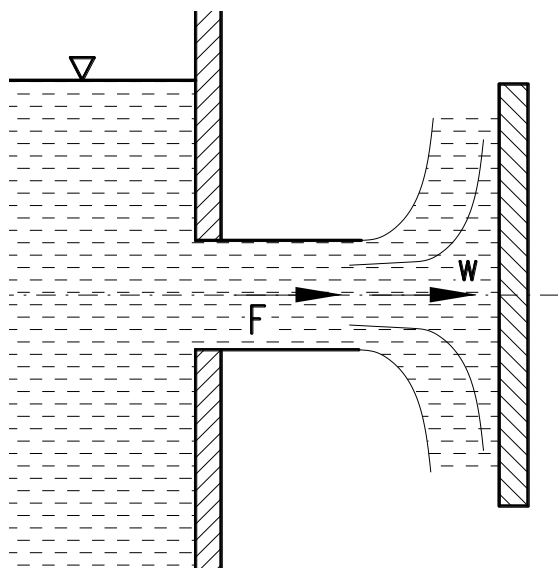
$$p_1 = \rho \cdot \left(g \cdot h + \frac{p_b}{\rho} + e_z \right) =$$

$$= 1000 \cdot \left(9,81 \cdot 3,5 + \frac{98100}{1000} + 39,87 \right) = 172307 \text{ Pa} =$$

$$= 0,172307 \text{ MPa}$$

4.2.15 Dynamické účinky proudu kapaliny

4.2.15.1 Dynamický účinek proudu na pevnou desku



Silové působení proudu můžeme odvodit ze vztahu impuls síly a hybnost.

impuls hybnost

$$\overbrace{F \cdot t}^{\text{impuls}} = \overbrace{m \cdot w}^{\text{hybnost}}$$

$$F = \frac{m}{t} \cdot w = Q_m \cdot w = Q_v \cdot \rho \cdot w$$

$$\boxed{F = Q_v \cdot \rho \cdot w}$$

w – relativní rychlost dopadu proudu na desku.

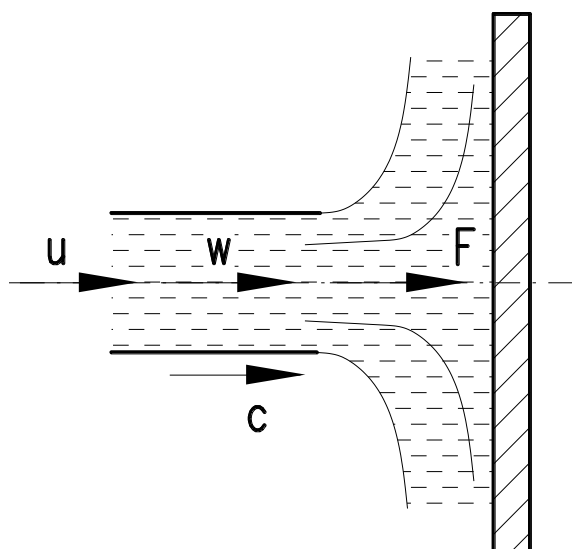
4.2.15.2 Dynamický účinek proudu na pohybující se desku

Celá soustava s deskou se pohybuje unášivou rychlostí.

u – obvodová, unášivá rychlost;

c – celková absolutní rychlost měřená k pevnému bodu;

w – relativní rychlost měřená k pevnému bodu, který se pohybuje.

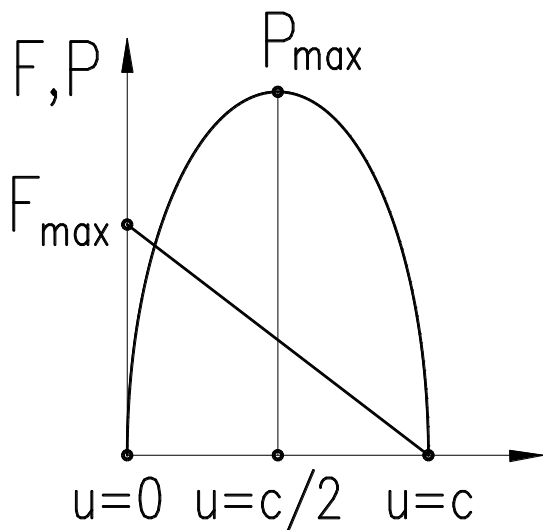


$$c = w + u$$

$$w = c - u$$

$$F = Q_v \cdot \rho \cdot w = Q_v \cdot \rho \cdot (c - u)$$

V případě, že $u = c$ je $F = 0$



Výkon motoru, založeného na dynamických účincích proudu:

$$P = F \cdot u = Q_V \cdot \rho \cdot (c - u) \cdot u$$

$$P_{\max} : u = \frac{c}{2}$$

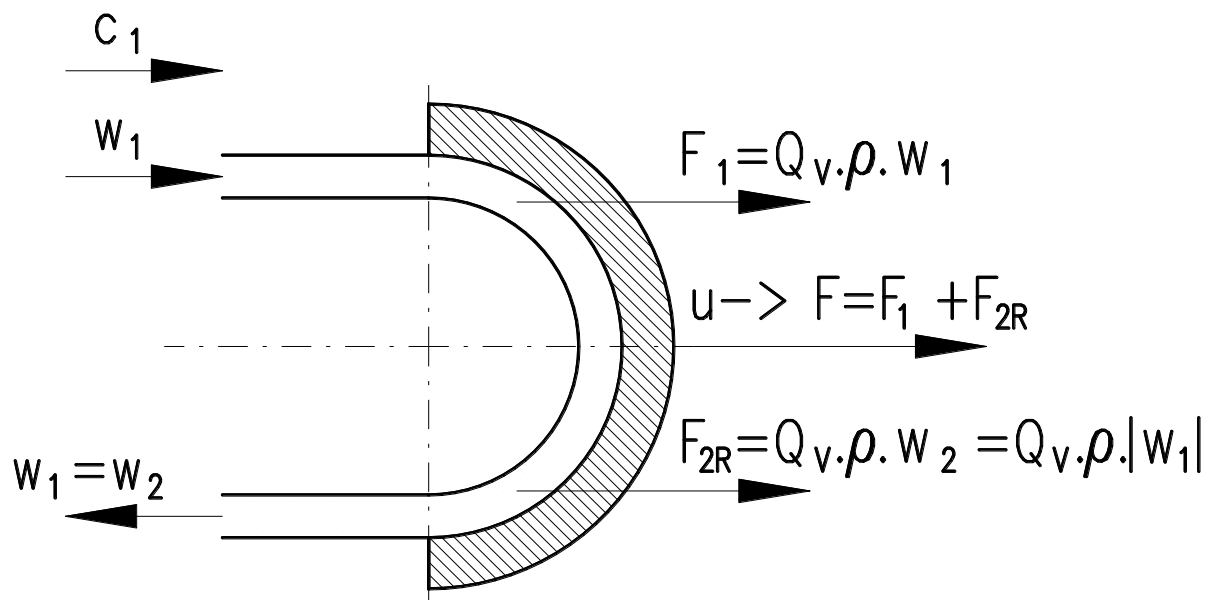
$$P_{\max} = Q_V \cdot \rho \cdot \frac{c^2}{4}$$

Účinnost:

$$\eta = \frac{\frac{P_{\max}}{E_K}}{t}$$

4.2.15.3 Působení proudu kapaliny na zakřivenou desku

U hydraulických strojů se zlepšuje účinnost zakřivenými lopatkami. Zakřivení se snažíme navrhnout tak, aby proud kapaliny vstupoval na lopatku bez rázu, tj. aby vstupoval na lopatky ve směru relativní rychlosti w . Na lopatce se směr proudu pomalu mění tak, aby vystupoval z lopatky ve směru tečny zakřivení.



$$F_{2R} = |F_2|$$

$$F_1 = Q_v \cdot \rho \cdot w_1$$

$$F = F_1 + F_{2R}$$

$$F_{2R} = Q_v \cdot \rho \cdot w_2 = Q_v \cdot \rho \cdot |w_1|$$

Dynamická síla proudu vody, který přitéká na zakřivenou plochu $F_1 = Q_V \cdot \rho \cdot w_1$. Stejná síla, ale reakční, působí na vstřikovací dýzu. Tuto sílu zachycujeme rámem stroje.

Na lopatce se změní směr proudu, který opouští lopatku relativní rychlostí w_2 .

Na základě principu akce a reakce platí: reakce proudu opouštějícího zakřivenou plochu:

$$F_{2R} = Q_V \cdot \rho \cdot w_2$$

Neuvažujeme-li tření proudu o stěnu lopatky, pak $w_1 = w_2$

Dynamický účinek je pak:

$$F = F_1 + F_{2R} = Q_V \cdot \rho \cdot (w_1 + w_2) = 2 \cdot Q_V \cdot \rho \cdot w_1$$

Výkon vodního motoru:

$$P = F \cdot u = 2 \cdot Q_V \cdot \rho \cdot \overbrace{w_1}^{w_1 = c - u} \cdot u$$

$$\text{Pro } u = \frac{c}{2} : P_{\max} = 2 \cdot Q_V \cdot \rho \cdot (c - u) \cdot u = 2 \cdot Q_V \cdot \rho \cdot \frac{c^2}{4} = Q_V \cdot \rho \cdot \frac{c^2}{2}$$

Max. účinnost:

$$\eta_{\max} = \frac{P_{\max}}{\frac{E_K}{t}} = \frac{Q_V \cdot \rho \cdot \frac{c^2}{2}}{\frac{1}{2} \cdot Q_m \cdot c^2} = \frac{Q_V \cdot \rho \cdot \frac{c^2}{2}}{Q_V \cdot \rho \cdot \frac{c^2}{2}} = 1 = 100\%$$

$$(E_K = \frac{1}{2} m \cdot w^2)$$

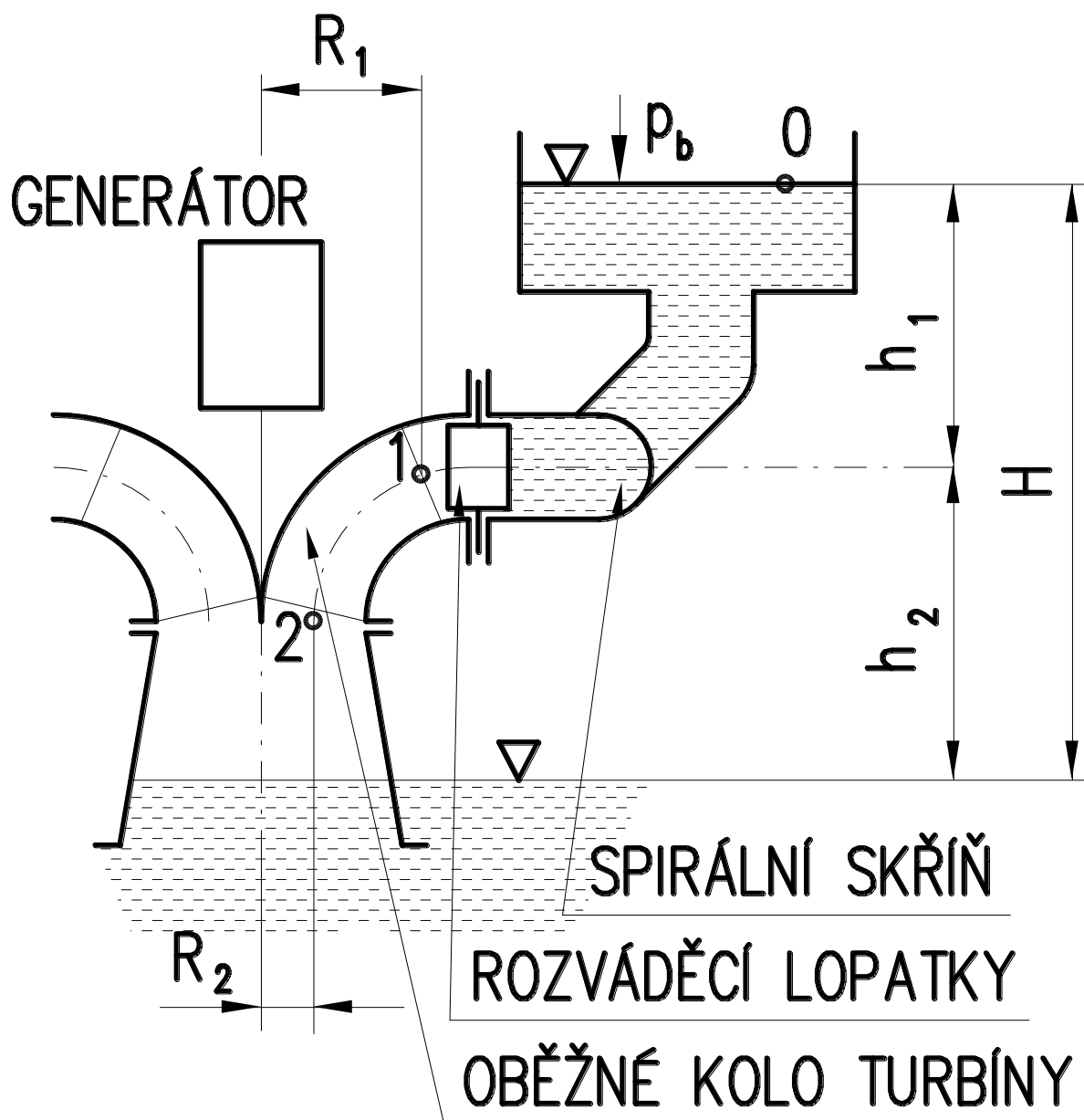
(u – obvodová, unášivá rychlost);

(c – celková absolutní rychlost měřená k pevnému, absolutnímu bodu);

(w – relativní rychlost).

Vodní motory založené na dynamickém účinku vodního proudu na zakřivenou plochu mohou mít teoreticky 100 % účinnost. Ve skutečnosti $\eta = 90 \div 93 \%$.

4.2.16 Pracovní rovnice lopatkových strojů



Rozváděcí lopatky fungují jako trysky usměrňující tok kapaliny na oběžné kolo. Převádějí tlakovou energii ($h \cdot \rho \cdot g$) na kinetickou energii.

$$s_2 < s_1, \quad w_2 > w_1, \quad p_2 < p_1$$

Spirální skříň slouží k tomu, aby se plynule zavodňovaly současně a rovnoměrně všechny lopatky. Spirála proto, že kapalina postupně odtéká, tedy potřebuje čím dál menší průtočný průřez.

Rozdíl výšek hladin mezi horní a dolní nádrží přehrady se nazývá **spád** – **H**. Pracovní rovnici lopatkových strojů získáme pomocí Bernoulliovy rovnice, kterou budeme psát pro jednotlivé úseky průtoku turbínou.

Mezi horní hladinou a vstupem do oběžného kola (0 – 1)

$$1) \quad g \cdot h_1 + \frac{p_b}{\rho} + 0 = 0 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2}$$

$$\frac{p_1}{\rho} = g \cdot h_1 + \frac{p_b}{\rho} - \frac{c_1^2}{2}$$

c_1 – absolutní rychlost na vstupu oběžného kola.

Druhý vztah je průtok vody oběžným kolem. Vzhledem k tomu, že kolo se otáčí, působí na něj odstředivá síla (1 – 2).

$$F_c = m \cdot r \cdot \omega^2$$

Pro 1 kg kapaliny bude střední velikost odstředivé síly:

$$F_c = 1 \cdot \frac{R_1 + R_2}{2} \cdot \omega^2 = \frac{R_1 + R_2}{2} \cdot \omega^2$$

Práci spotřebovanou k překonání odstředivé síly budeme považovat pro daný úsek průtoku jako ztrátovou energii.

$$W = F_c \cdot (R_1 - R_2) = \frac{R_1 + R_2}{2} \cdot \omega^2 \cdot (R_1 - R_2) = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2} \cdot \omega^2 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = e_z$$

Pro průtok vody mezi lopatkami oběžného kola platí (1–2): s ohledem na to, že rozdíl výšek 1 – 2 je malý, nebudeme uvažovat polohovou energii ($g \cdot h$).

$$2) \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + e_z = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

Pro třetí úsek – mezi výstupem z oběžného kola a dolní hladinou platí:

$$3) g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} = 0 + \frac{p_b}{\rho} + \frac{\overbrace{c_s^2}^{\text{ZANEDBÁVÁME}}}{2}$$

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_b}{\rho} - \frac{c_2^2}{2} - g \cdot h_2$$

Z rovnice:

$$1) \frac{p_1}{\rho} = g \cdot h_1 + \frac{p_b}{\rho} - \frac{c_1^2}{2}$$

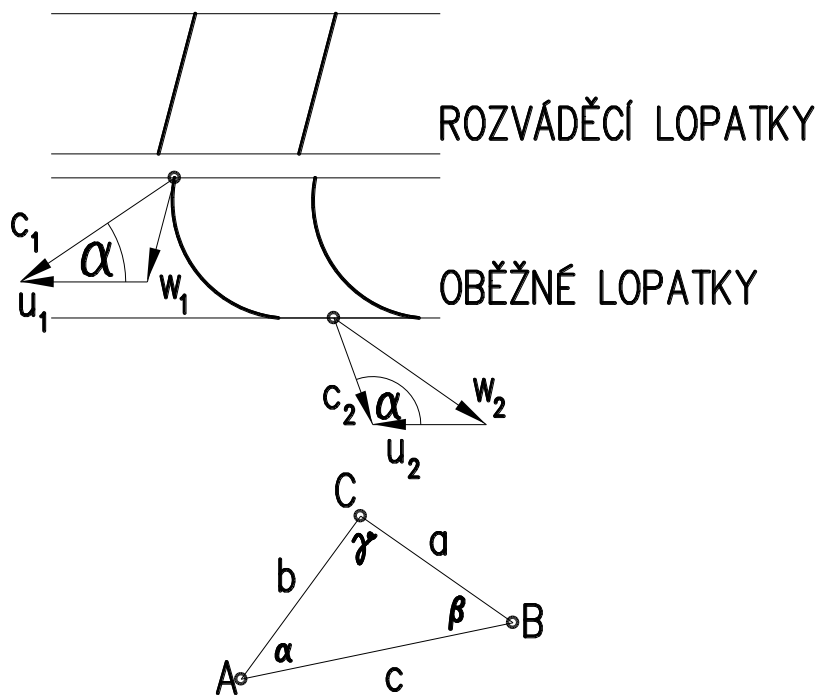
$$3) \frac{p_2}{\rho} = \frac{p_b}{\rho} - g \cdot h_2 - \frac{c_2^2}{2}$$

Dosadíme do rovnice 2.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

$$g \cdot h_1 + \frac{p_b}{\rho} - \frac{c_1^2}{2} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_b}{\rho} - g \cdot h_2 - \frac{c_2^2}{2} + \frac{w_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

$$4) g \cdot h_1 + g \cdot h_2 = g \cdot H = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$



Z rychlostního Δ vyjádříme pomocí Cosinovy věty w_1 a w_2 a dosadíme do rovnice 4.

Cosinova věta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2c_1 u_1 \cdot \cos \alpha_1$$

$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2c_2 u_2 \cdot \cos \alpha_2$$

$$g \cdot H = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{c_2^2 + u_2^2 - 2c_2 u_2 \cdot \cos \alpha_2 - c_1^2 + u_1^2 - 2c_1 u_1 \cdot \cos \alpha_1}{2}$$

$$g \cdot H = \frac{c_1^2 - c_2^2 + u_1^2 - u_2^2 + c_2^2 + u_2^2 - 2c_2 u_2 \cdot \cos \alpha_2 - c_1^2 + u_1^2 - 2c_1 u_1 \cdot \cos \alpha_1}{2}$$

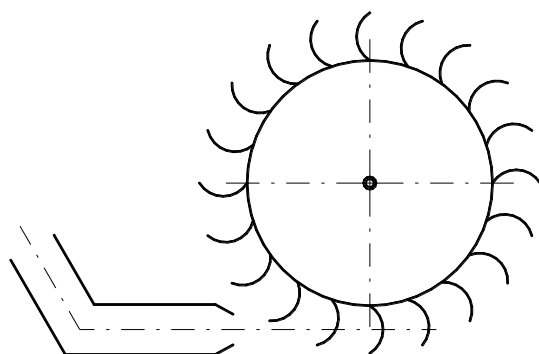
$$g \cdot H = \frac{2 \cdot (c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1 - c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \alpha_2)}{2} = c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1 - c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \alpha_2$$

Vezmeme-li v úvahu hydraulické ztráty, potom pracovní rovnice turbíny má tvar:

$$\eta_h \cdot g \cdot H = c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1 - c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \alpha_2, \quad \eta_h - \text{hydraulická účinnost}$$

Podobným způsobem bychom mohli odvodit pracovní rovnici odstředivých čerpadel.

PELTONOVA TURBÍNA



Pracovní rovnice má pak tvar:

$$g \cdot H \cdot \frac{1}{\eta_h} = c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \alpha_2 - c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \alpha_1$$

1 – vstup do oběžného kola.

2 – výstup z oběžného kola.

$$\text{Výkon vodní turbíny: } P = Q_v \cdot \rho \cdot g \cdot H \cdot \eta_c \text{ [W]}$$

$$\text{Příkon čerpadel: } P = Q_v \cdot \rho \cdot g \cdot H \cdot \frac{1}{\eta_c}$$

Př.: Jaké množství energie odevzdá za 1s 1kg vody lopatkám rovnotlaké turbíny, jestliže absolutní vstupní rychlost je 58,9m/s, absolutní výstupní rychlost 24,6m/s ?

$$Y = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} = \frac{58,9^2 - 24,6^2}{2} = 1432 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

5 Termomechanika

V termomechanice se často používá pojmů **systém**, **soustava**, **těleso**. Tímto termínem rozumíme určité množství látky (tuhého, kapalného nebo plynného skupenství), jehož termomechanické vlastnosti vyšetřujeme. Systémem v termomechanice může být např. plyn v ocelové lahvi, vodní pára expandující v turbíně. Systém může nebo nemusí být stálý. Jestliže se systém mění (např. vzduch se v kompresoru stlačuje, nebo součást ohříváme v peci apod.), používáme pro tyto procesy pojmy **termodynamický děj** nebo **změna stavu systému**.

Teplota je jednou ze základních fyzikálních veličin. Teplotu měříme pomocí teploměrů, které pracují na celé řadě principů (dilatační, odporové, ...).

Máme:

a) **Celsiova teplotní stupnice** $t [^{\circ}\text{C}]$ – 0 = trojný bod vody (skupenství pevné, kapalné a plynné).

b) **Termodynamická teplotní stupnice (Kelvinova)** $T [\text{K}]$ 0 = absolutní nula

$$T = t + 273,16$$

$$[\text{K}^{\circ}] = [^{\circ}\text{C}] + 273,16$$

Pokud se při výpočtech dosazuje rozdíl teplot, je jedno, která stupnice se používá.

$$t_1 - t_2 = T_1 - T_2$$

Pokud se při řešení dostaneme k podílu teplot, musíme dosazovat v $[\text{K}]$.

$$\frac{T_1}{T_2} \neq \frac{t_1}{t_2}$$

5.1 Teplo a tepelný výkon

Teplo je forma energie, která přechází z tělesa teplejšího na těleso chladnější. Množství tepla dodaného nebo odebraného tělesu:

$$Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \quad [\text{J}]$$

m – hmotnost tělesa;

c – měrná tepelná kapacita – vyjadřuje množství tepla potřebného k ohřátí 1 kg látky o 1 stupeň;

t_1 – počáteční teplota;

t_2 – výsledná teplota.

Pokud tělesu teplo dodáváme, $Q > 0$

odebíráme, $Q < 0$

Jednotkou tepla je **1 J**. Starší jednotka $1 \text{ kcal} = 4186,8 \text{ J}$

Tepelná kapacita systému je podíl tepla a teplotního rozdílu:

$$K = \frac{Q}{t_2 - t_1} \left[\frac{J}{K} \right]$$

$$c = \frac{K}{m} \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$$

c – je v rovnici pro sdílení tepla **tepelnou kapacitou 1 kg látky** a je označováno jako **měrné teplo** nebo **měrná tepelná kapacita**.

Množství tepla dodaného nebo odebraného za jednotku času nazýváme **tepelným výkonem** a udáváme ve [W].

$$Q_\tau = \frac{Q}{\tau} \left[\frac{J}{s} = W \right]$$

U tuhých a kapalných látek máme určitou hodnotu měrného tepla jednoznačně danou.

U plynů rozlišujeme 2 měrná tepla:

c_v – měrné teplo za stálého objemu (pro vzduch: $c_v = 714 \frac{J}{kg \cdot K}$);

c_p – měrné teplo za stálého tlaku ($c_p = 1005 \frac{J}{kg \cdot K}$);

$$c_p > c_v$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa \rightarrow \begin{array}{l} \rightarrow 1,66 \text{ pro 1 atomové plyny;} \\ \rightarrow 1,4 \text{ pro 2 atomové plyny;} \\ \rightarrow 1,3 \text{ pro 3 atomové plyny;} \end{array}$$

κ – Poissonova konstanta nebo-li adiabatický exponent.

Př.: Chladičem protéká za 1 hodinu 3000 kg oleje 80 °C teplého, který se má zchladit na 20 °C. Kolik tepla je nutno odvést a kolik chladicí vody musí chladičem protéct, ohřeje-li se voda z 12 °C na 24 °C?

Měrné teplo oleje: $c_1 = 1,67 kJ/kg \cdot K$.

Měrné teplo vody: $c_2 = 4,2 kJ/kg \cdot K$.

Množství tepla odebraného oleji = množství tepla dodaného vodě.

Množství tepla odebraného oleji:

$$Q_1 = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = 3000 \cdot 1,67 \cdot (20 - 80) = -300600 kJ$$

$$Q_1 = m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t_1) \rightarrow m_2 = \frac{Q_1}{c_2 \cdot (t_2 - t_1)} = \frac{300600}{4,2 \cdot (24 - 12)} = 5963 kg/h$$

Tepelný výkon chladiče:

$$Q_{\tau} = \frac{Q}{\tau} = \frac{300600}{3600} = 83,5 \text{ kW} \quad \left[\frac{\text{kJ}}{\text{s}} = \text{kW} \right]$$

Př.: V nádobě je 10 kg vody teploty 10 °C. Jak se zvětší teplota vody na teplotu t , ochladíme-li v ní ocelovou součást hmotnosti 2 kg a teploty 400 °C?

	Voda	Ocel	
m_1	10 kg	2 kg	m_2
t_1	10 °C	400 °C	t_2
c_1	4,2 kJ/kg · K	0,465 kJ/kg · K	c_2

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_1 \cdot c_1 \cdot (t - t_1) = m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t)$$

$$m_1 \cdot c_1 \cdot t - m_1 \cdot c_1 \cdot t_1 = m_2 \cdot c_2 \cdot t_2 - m_2 \cdot c_2 \cdot t$$

$$m_1 \cdot c_1 \cdot t + m_2 \cdot c_2 \cdot t = m_2 \cdot c_2 \cdot t_2 + m_1 \cdot c_1 \cdot t_1$$

$$t = \frac{m_2 \cdot c_2 \cdot t_2 + m_1 \cdot c_1 \cdot t_1}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2} = \frac{2 \cdot 0,465 \cdot 400 + 10 \cdot 4,2 \cdot 10}{10 \cdot 4,2 + 2 \cdot 0,465} = 18,4^\circ\text{C}$$

Př.: Ložiskem turbíny se protlačuje za 1 s 15 kg oleje, který se vlivem tření ohřívá z teploty 23 °C na teplotu 68 °C. Teplý olej se ochlazuje ve vodním chladiči, ve kterém se voda ohřívá z teploty 18 °C na 22 °C. Jaký musí být objemový průtok vody chladičem? Měrné teplo oleje $c_o = 1,67 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$.

Olej: $Q_{mo} = 15 \text{ kg/s}$	Voda:
$t_{1o} = 23^\circ\text{C}$	$t_{1v} = 18^\circ\text{C}$
$t_{2o} = 68^\circ\text{C}$	$t_{2v} = 22^\circ\text{C}$
$c_o = 1,67 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$	$c_v = 4,2 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$

Množství tepla odebraného oleji:

$$Q_{\tau} = Q_{mo} \cdot c_o \cdot (t_{2o} - t_{1o}) = 15 \cdot 1,67 \cdot (68 - 23) = 1127,25 \text{ kJ/s} = 1127,25 \text{ kW}$$

Teplo, které musí voda odebrat:

$$Q_{\tau} = Q_m \cdot c_v \cdot (t_{2v} - t_{1v}) \rightarrow Q_m = \frac{Q_{\tau}}{c_v \cdot (t_{2v} - t_{1v})} = \frac{1127,25}{4,2 \cdot (22 - 18)} = 67,1 \text{ kg/s}$$

$$Q_v = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{67,1}{1000} = 0,0671 \text{ m}^3/\text{s} = 67,1 \text{ l/s}$$

Př.: Ocelový předmět o hmotnosti $m_1 = 2,5\text{kg}$ ohřátý na teplotu 800°C byl zakalen do olejové lázně hmotnosti $m_2 = 10\text{ kg}$ a teploty 20°C . Na jakou teplotu se ohřál olej?

Ocel:	Olej:
$m_1 = 2,5\text{kg}$	$m_2 = 10\text{kg}$
$t_1 = 800^\circ\text{C}$	$t_2 = 20^\circ\text{C}$
$c_1 = 0,465\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$	$c_2 = 1,67\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$
$t = ?$	

$$Q_1 = Q_2$$

$$m_1 \cdot c_1 \cdot (t_1 - t) = m_2 \cdot c_2 \cdot (t - t_2)$$

$$m_1 \cdot c_1 \cdot t_1 - m_1 \cdot c_1 \cdot t = m_2 \cdot c_2 \cdot t - m_2 \cdot c_2 \cdot t_2$$

$$t = \frac{m_2 \cdot c_2 \cdot t_2 + m_1 \cdot c_1 \cdot t_1}{m_2 \cdot c_2 + m_1 \cdot c_1} = \frac{10 \cdot 1,67 \cdot 20 + 2,5 \cdot 0,465 \cdot 800}{1,67 \cdot 10 + 2,5 \cdot 0,465} = 70,77^\circ\text{C}$$

5.2 Teplotní roztažnost a rozpínavost látek

Kovová tyč, která má při teplotě t_o délku l_o , změní svoji délku na hodnotu l .

$$l = l_o + l_o \cdot \alpha \cdot \Delta t = l_o + l_o \cdot \alpha \cdot (t - t_o)$$

α – součinitel tepelné roztažnosti, $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6} [\text{K}^{-1}]$

Pro $t_o = 0 [\text{K}]$:

$$l = l_o \cdot (1 + \alpha \cdot t)$$

$$\Delta l = l - l_o = l_o \cdot \alpha \cdot t$$

Podle daného vztahu se mění všechny rozměry tyče (nebo libovolné strojní součásti). Proto změna objemu vyvolaná změnou teploty je rovna:

$$V = a_o \cdot b_o \cdot c_o \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)^3$$

Podstatné změny objemu způsobené změnou teploty nastávají u plynů. Plyny jsou stlačitelné látky, změnu jejich objemu můžeme dosáhnout nejen změnou teploty, ale také změnou tlaku. Při sledování roztažnosti plynů musíme proto vymežit vliv změny tlaku tzn. sledovat jejich teplotní roztažnost při konst. tlaku. Proto hovoříme o **izobarické tepelné roztažnosti** ($p = \text{konst.}$).

Pro všechny plyny platí:

$$\text{Součinitel tepelné objemové roztažnosti: } \gamma \doteq \frac{1}{273} [\text{K}^{-1}]$$

Za předpokladu, že zvyšujeme teplotu plynu za stálého objemu ($V = \text{konst.}$), plyn se rozpíná. Jedná se o **izochorickou tepelnou roztažnost**.

Tlak při teplotě t :

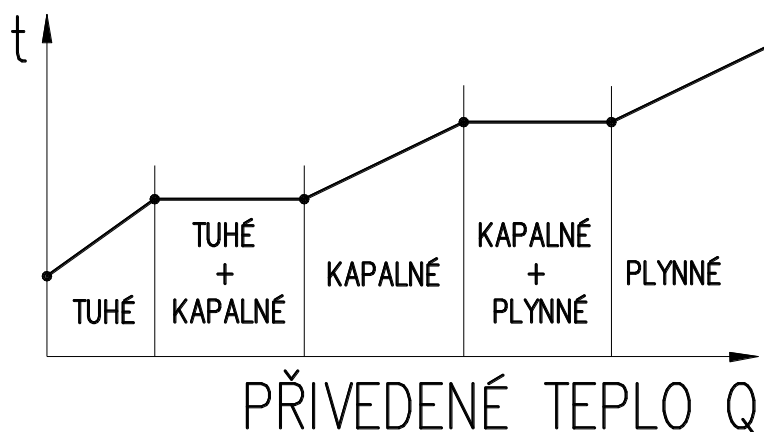
$$p = p_o \cdot [1 + \beta \cdot (t - t_o)]$$

Pro $t_o = 0 \text{ [K]}$

$$p = p_o \cdot (1 + \beta \cdot t)$$

$\beta = \frac{1}{273} \text{ [K}^{-1}\text{]}$ – součinitel izochorické tepelné roztažnosti ($V = \text{konst.}$).

5.3 Změna skupenství



$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t$$

Přivádíme-li kapalině teplo, roste její teplota a po dosažení určité teploty – **bodu varu**; se při dalším přívodu tepla změni kapalina v páru. Podobně je tomu při ochlazování.

Teplota kapaliny klesá a při určité teplotě (**bod tuhnutí**) se kapalina změni v tuhoun látku. Tlak a teplota se během změny skupenství nemění. Množství tepla potřebného ke změně skupenství nazýváme **skupenským teplem** a označujeme L .

Množství skupenského tepla vztažené na 1 kg látky nazýváme **měrným skupenským teplem** a označujeme l .

$$l = \frac{L}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

$$L = m \cdot l$$

Při ohřevu rozlišujeme **skupenské teplo tání** l_t a **vypařování** l_v

$$l_v = l_t$$

Při ochlazování – odvodu tepla hovoříme o **skupenském teple kondenzace a tuhnutí**.

Př.: Určete množství tepla potřebného k přeměně $m = 10 \text{ kg}$ ledu, $t_1 = -10^\circ\text{C}$ na vodu $t_2 = 50^\circ\text{C}$.

Led: $c_1 = 2,1 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$

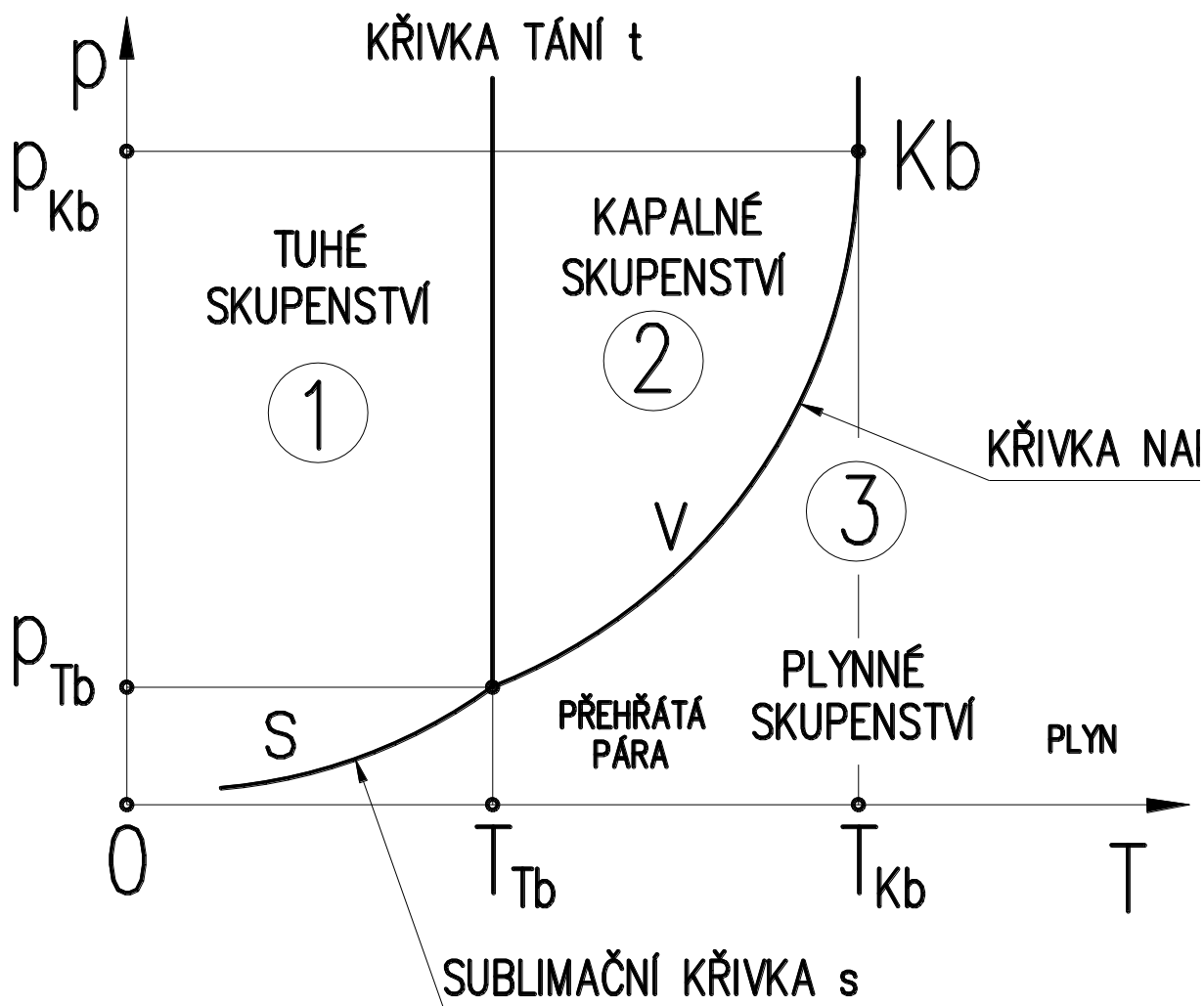
Voda: $c_2 = 4,2 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$

Měrné skupenské teplo tání $l_t = 334 \text{ kJ/kg}$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q = m \cdot c_1 \Delta t_1 + m \cdot l_t + m \cdot c_2 \cdot \Delta t_2 = 10 \cdot 2,1 \cdot (0 - (-10)) + 10 \cdot 334 + 10 \cdot 4,2 \cdot (50 - 0) = 5650 \text{ kJ}$$

Rozlišujeme 3 základní skupenství látek: **tuhé**, **kapalné** a **plynné**. V každém skupenství může existovat daná látka jen v určitém rozsahu tlaku a teplot. To je znázorněno v **rovnovážném diagramu (p – T)**.



Kb – kritický bod.

Tb – trojný bod.

Mezi třemi skupenstvími jsou možné 3 dvojice skupenských změn:

- a) Tání – tuhnutí.
- b) Vypařování – kondenzace.
- c) Sublimace – desublimace.

Rovnovážný diagram je podobný pro různé druhy látek. **Skupenství tuhé od kapalného odděluje křivka t** (u běžných látek je vertikální), která spojuje body tání při různých tlacích. Na křivce tání jsou zobrazeny možné současné existence tuhého a kapalného skupenství. Podobně mezi **skupenstvím kapalným a plynným získáme spojením teplot bodů varu pro různé tlaky křivku v**, tzv. **křivku napětí**. **Křivka s – křivka sublimace** odděluje v diagramu skupenství tuhé od plynného.

Na plochách mimo křivky je možná existence jen jednoho skupenství. Společný bod všech tří křivek nazýváme **trojný bod T_b** . Pro každou látku má trojný bod určitou hodnotu tlaku p_{Tb} . Jedině při této hodnotě se daná látka může vyskytovat ve všech 3 skupenstvích.

Křivka napětí (vypařování) v končí v tzv. **kritickém bodě K_b** . Tady mizí rozdíl mezi kapalným a plynným skupenstvím látky. Nad kritickým tlakem přechází kapalně skupenství v plynné bez náhlé změny svých vlastností.

Látka při nadkritické teplotě se nazývá plyn, při podkritické přehřátá pára.

Obojí jsou plynná skupenství.

Voda:

$$T_{Tb} = 273,16 K \cong 0,01^\circ C$$

$$T_{Kb} = 647 K \cong 374^\circ C$$

$$p_{Tb} = 6,1 \cdot 10^2 Pa$$

$$p_{Kb} = 2,21 \cdot 10^7 Pa$$

Teplota trojného bodu vody $T_{Tb} = 273,16 K$ je základním bodem mezinárodní teplotní stupnice. Bod byl zvolen proto, že se dá v laboratořích přesně realizovat.

Př.: Určete množství tepla, potřebného k přeměně 5 kg ledu teploty $-15^\circ C$ na vodu teploty $30^\circ C$.

$$m = 5 kg, \quad \text{Led:} \quad t_1 = -15^\circ C, \quad c_1 = 2,1 \frac{kJ}{kg \cdot K}, \quad l_t = 334 \frac{kJ}{kg}$$

$$\text{Voda:} \quad t_2 = 30^\circ C, \quad c_2 = 4,2 \frac{kJ}{kg \cdot K}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q = m \cdot c_1 \cdot \Delta t_1 + m \cdot l_t + m \cdot c_2 \cdot \Delta t_2 = m \cdot (c_1 \cdot (0 - (-15)) + l_t + c_2 \cdot (30 - 0)) = 5 \cdot (2,1 \cdot 15 + 334 + 4,2 \cdot 30) = 2457,5 kJ$$

5.4 Termodynamika plynů

Zavádíme jednoduchou pracovní látku, které říkáme ideální plyn. Je to látka ideálně stlačitelná s jednoduchými termofyzikálními vlastnostmi. Její základní vlastností je, že v neomezeném rozsahu tlaku a teplot zůstává v plynném stavu.

Termodynamický stav plynu je zpravidla určen tlakem p [Pa] a teplotou T [K].

Při daném tlaku a teplotě má množství m [kg] plynu celkový objem V , tzv. **měrný objem** v je objem 1 kg plynu;

$$\text{měrný objem } v = \frac{V}{m} \left[\frac{m^3}{kg} \right] \qquad v = \frac{1}{\rho}$$

Základní fyzikální veličiny jsou p , T , v .

Změny stavu plynu, tj. změny tlaku, teploty a měrného objemu, dosáhneme sdílením tepla mezi plynem a okolím.

Pro zjednodušení předpokládáme, že plyn během změny stavu je v každém okamžiku v rovnovážném stavu tzn., že v celém prostoru má plyn stejný tlak a stejnou teplotu.

Idealizované děje, při kterých plyn prochází jen rovnovážnými stavy, nazýváme v termodynamice **vrátne**. Skutečné děje jsou nevratné.

5.4.1 Základní zákon ideálního plynu

Dva zcela různé stavy ideálního plynu se navzájem liší hodnotami všech svých stavových veličin: tlaku, teploty a měrného objemu. Na základě laboratorních pokusů mezi stavovými veličinami platí vztah:

$$\boxed{\frac{p_1 \cdot v_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot v_2}{T_2} = \text{konst} = r}$$

r – měrná plynová konstanta, pro vzduch

$$r = 287 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Pro $m = 1$ kg látky platí:

$$\frac{p \cdot v}{T} = r \quad \rightarrow$$

$$\boxed{p \cdot v = r \cdot T}$$

Pro m kg:

$$\boxed{p \cdot v \cdot m = p \cdot V = m \cdot r \cdot T}$$

Př.: V uzavřené nádrži $V = 100$ l je vzduch o tlaku $p = 1$ MPa, teplotě 27 °C. Určete hmotnost plynu.

$$r = 287 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$p \cdot V = m \cdot r \cdot T \rightarrow m = \frac{p \cdot V}{r \cdot T} = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 0,1}{287 \cdot (27 + 273)} = 1,16 kg$$

Př.: Určete hustotu vzduchu ρ o tlaku $p = 0,5 \text{ MPa}$ a teplotě 100 °C ; $r = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

$$p \cdot v = r \cdot T \rightarrow v = \frac{r \cdot T}{p}$$

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{p}{r \cdot T} = \frac{0,5 \cdot 10^6}{287 \cdot 373} = 4,67 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Z rovnice, která vyjadřuje stav mezi stavovými veličinami dvou stavů jednoho a téhož plynu, můžeme odvodit rovnici pro změnu **izochorickou** ($v_1 = v_2$).

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} - \text{Charlesův zákon.}$$

Pro izobarickou změnu ($p_1 = p_2$) platí:

$$\frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} - \text{Gay – Lussacův zákon.}$$

Pro izotermickou změnu stavu ($T_1 = T_2$) platí:

$$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2 \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1} - \text{Boyleův – Mariotteův zákon.}$$

Pro ideální plyny předpokládáme, že dvě základní měrná tepla c_v a c_p jsou konstantní a závisí jen na druhu plynu. Obecně platí:

$$c_p - c_v = r - \text{měrná plynová konstanta}$$

Poměr obou měrných tepel:

$$\frac{\text{měrné teplo za stálého tlaku}}{\text{měrné teplo za stálého objemu}} = \kappa \quad \kappa - \text{Poissonova konstanta (adiabatický exponent)}$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa \quad \begin{array}{l} \rightarrow 1,66 \text{ pro 1 atomové plyny;} \\ \rightarrow 1,4 \text{ pro 2 atomové plyny;} \\ \rightarrow 1,3 \text{ pro 3 atomové plyny.} \end{array}$$

$$c_p = \kappa \cdot c_v$$

$$c_p - c_v = \kappa \cdot c_v - c_v = r$$

$$c_v \cdot (\kappa - 1) = r$$

$$\boxed{c_v = \frac{r}{\kappa - 1}}$$

$$\boxed{c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot r}$$

Př.: Určete velikost c_p a c_v pro vzduch $r = 287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $\kappa = 1,4$.

$$c_v = \frac{r}{\kappa - 1} = \frac{287}{1,4 - 1} = 717,5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot r = \frac{1,4}{0,4} \cdot 287 = 1004,5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Př.: V tlakové nádobě objemu $V = 2 \text{ m}^3$ je vzduch o tlaku $p = 0,5 \text{ MPa}$ a teplotě $t_1 = 20^\circ \text{C} = 293 \text{ K}$.

Určete množství tepla potřebného k ohřátí plynu na teplotu $t_2 = 50^\circ \text{C} = 323 \text{ K}$ a tlak plynu po

ohřátí; $r = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, $c_v = 717,5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

$$p_1 \cdot V_1 = m \cdot r \cdot T_1 \rightarrow m = \frac{p_1 \cdot V_1}{r \cdot T_1} = \frac{500000 \cdot 2}{287 \cdot (273 + 20)} = 11,89 \text{ kg}$$

$$Q = m \cdot c_v \cdot \Delta t = 11,89 \cdot 717,5 \cdot 30 = 255973 \text{ J}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 0,5 \cdot \frac{323}{293} = 0,551 \text{ MPa}$$

5.4.2 První zákon termodynamiky

Zákon o zachování energie říká, že energie nemůže vznikat ani se ztrácet, ale může se změnit z jedné formy na druhou. V praxi se soustředujeme na vyšetření přeměn dvou forem energie – tepelné a mechanické.

Zákon o zachování energie v termomechanice nazýváme **1. zákon termodynamiky**.

Množství energie, kterou jsme převedli nebo odvedli plynu při jeho ohřevu nebo ochlazení, nazveme teplem a označíme Q .

Podle zákona zachování energie se toto množství energie nemůže ztratit. Muselo zvýšit nebo snížit energii plynu. Současně se přitom změnil stav plynu, tj. změnila se jeho teplota popřípadě i tlak.

Energii plynu a tím i jeho stav **můžeme měnit** kromě sdílení tepla mezi plynem a okolím **taky jeho stlačením (kompresí) nebo rozpínavostí (expanzí)**.

Při kompresi mechanickou energii spotřebujeme, při expanzi získáme.

Tuto energii v termomechanice nazýváme jednorázovou (absolutní) prací a označujeme **A**.

Teplu a mechanická práce jsou rovnocenné formy energie.

Př.: Spalovací motor o výkonu $P = 3,5 \text{ kW}$ spotřebuje za 1 hodinu $Q_m = 1,5 \text{ kg/h}$ benzínu výhřevnosti $q = 46\,000 \text{ kJ/kg}$. Určete účinnost motoru.

$$\eta = \frac{\text{výkon}}{\text{príkion}} = \frac{P}{P_p} = \frac{P \cdot 3600}{Q_m \cdot q} = \frac{3500 \cdot 3600}{1,5 \cdot 46000000} \doteq 0,18 = 18\%$$

Př.: Olověná kulička $m = 20 \text{ g} = 0,02 \text{ kg}$ narazí rychlostí $w = 200 \text{ m/s}$ do dřeva. Jak se změní teplota kuličky? Měrná tepelná kapacita (měrné teplo) $c = 0,13 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} = 130 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. Předpokládejte, že 1/3 energie se spotřebuje na deformaci stěny a kuličky.

$$W_K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot w^2 = \frac{0,02}{2} \cdot 200^2 = 400 \text{ J}$$

$$\text{Teplo } Q = m \cdot c \cdot \Delta t$$

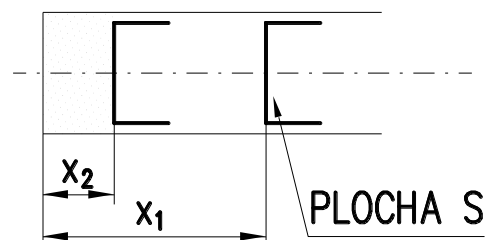
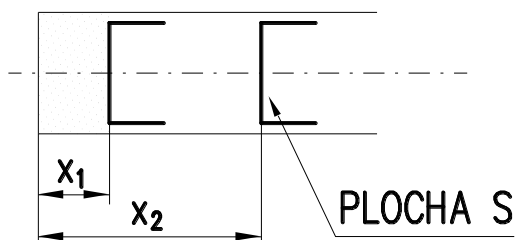
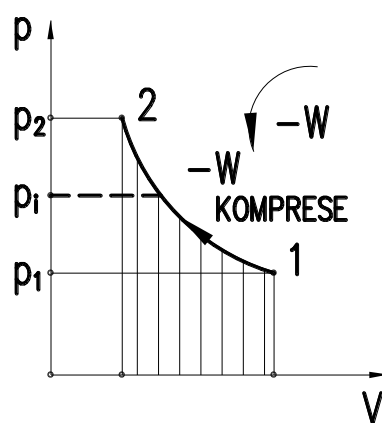
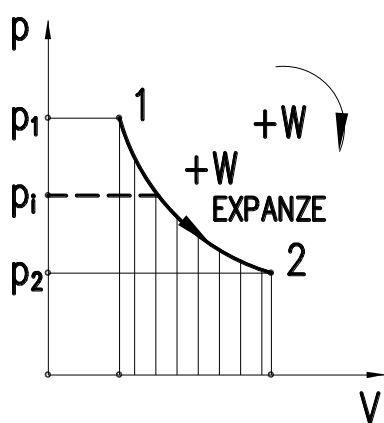
$$\frac{2}{3} E_K = Q = m \cdot c \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\frac{2}{3} W_K}{m \cdot c} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 400}{0,02 \cdot 130} = 103^\circ \text{C}$$

5.4.3 Absolutní práce

Je spotřebovaná při kompresi nebo získaná při expanzi plynu. Názornou představu o velikosti práce získáme použitím tlakového $p - V$ diagramu. Každý bod tohoto diagramu představuje určitý stav plynu.

Bod 1 – výchozí stav.

Bod 2 – konečný stav.



Čára $p - V$ diagramu zobrazuje průběh změny stavu. **Absolutní práce** v tomto diagramu je vyjádřena plochou pod křivkou změny stavu.

Velikost absolutní práce určíme tak, že plochu pod křivkou změny stavu si nahradíme obdélníkem stejného obsahu. Výšku obdélníka nazýváme **střední (indikovaný) tlak p_i** .

$$W = p_i \cdot S \cdot (x_2 - x_1) = p_i \cdot (V_2 - V_1)$$

Absolutní práce bývá též nazývána jako práce objemová.

5.4.4 Vnitřní energie

Abychom mohli 1. zákon termodynamiky matematicky zapsat, musíme zavést název pro energii plynu, jehož změna se dá rovnicí popsat. Energii plynu závislou na termodynamickém stavu nazýváme vnitřní energií a používáme značku U [J].

Vnitřní energie není tíhová ($g \cdot H$), tlaková $\left(\frac{p}{\rho}\right)$ ani kinetická $\left(\frac{w^2}{2}\right)$. Závisí jen a pouze na termodynamickém stavu plynu, který je určen tlakem a teplotou.

Dodáme-li určitému množství plynu teplo z okolí ($Q > 0$) a současně odebereme absolutní práci W ($W < 0$), změní se energie plynu.

Vnitřní energie:
$$U_2 - U_1 = Q - W$$

Pro 1 kg plynu označujeme stavové veličiny malými písmeny.

Vnitřní energie pro 1 kg plynu:
$$u = \frac{U}{m} \left[\frac{J}{kg} \right]$$

První zákon termodynamiky pro 1 kg plynu:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = q - w$$

Množství tepla:
$$q = \frac{Q}{m} \left[\frac{J}{kg} \right]$$

Práce:
$$w = \frac{W}{m} \left[\frac{J}{kg} \right]$$

1. zákon termodynamiky pro m [kg] plynu:

$$\boxed{U_2 - U_1 = Q - W}$$

Pro 1 kg plynu:
$$\Delta u = \boxed{u_2 - u_1 = q - w} \left[\frac{J}{kg} \right]$$

Vnitřní energie je stavovou veličinou závisící na termodynamickém stavu. U ideálního plynu závisí jen na jeho teplotě.

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1) = c_v \cdot (t_2 - t_1)$$

V technických výpočtech nepotřebujeme znát absolutní hodnotu vnitřní energie, počítáme vždy s přírůstkem vnitřní energie.

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

Př.: Jaký měrný objem v a hustotu ρ má oxid uhličitý CO_2 při tlaku $p = 0,15 \text{ MPa}$ a teplotě $t = 257^\circ\text{C} = 530 \text{ K}$, měrná plynová konstanta $r = 189 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$.

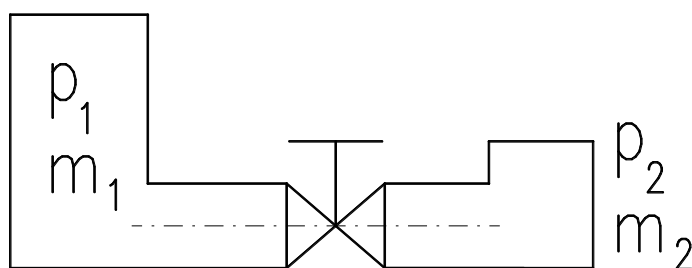
Základní zákon ideálního plynu:

$$p \cdot v = r \cdot T$$

$$v = \frac{r \cdot T}{p} = \frac{189 \cdot 530}{150000} = 0,668 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{1}{0,668} = 1,497 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Př.: Dvě tlakové nádoby jsou spojeny trubicí s uzavřeným kohoutem. V první nádobě objemu $V_1 = 50 \text{ l}$ je plyn o tlaku $p_1 = 15 \text{ MPa}$. Ve druhé nádobě o objemu $V_2 = 7 \text{ l}$ je tlak $p_2 = 1 \text{ MPa}$. Jaký tlak se ustálí v obou nádobách při nezměněné teplotě T , jestliže otevřeme spojovací kohout?



$$p \cdot V = r \cdot m \cdot T$$

$$m_1 + m_2 = m$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{r \cdot T_1} + \frac{p_2 \cdot V_2}{r \cdot T_2} = \frac{p \cdot (V_1 + V_2)}{r \cdot T}$$

$$T_1 = T_2 = T$$

$$p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2 = p \cdot (V_1 + V_2)$$

$$p = \frac{p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{15 \cdot 50 + 1 \cdot 7}{50 + 7} = 13,28 \text{ MPa}$$

5.4.5 Technická práce

Tvar prvního zákona termodynamiky ($U_2 - U_1 = Q - W$) není výhodný pro termodynamické výpočty technických zařízení. Zde používáme 2. tvar prvního zákona termodynamiky, který můžeme odvodit tak, že k levé i pravé straně rovnice připočteme výraz

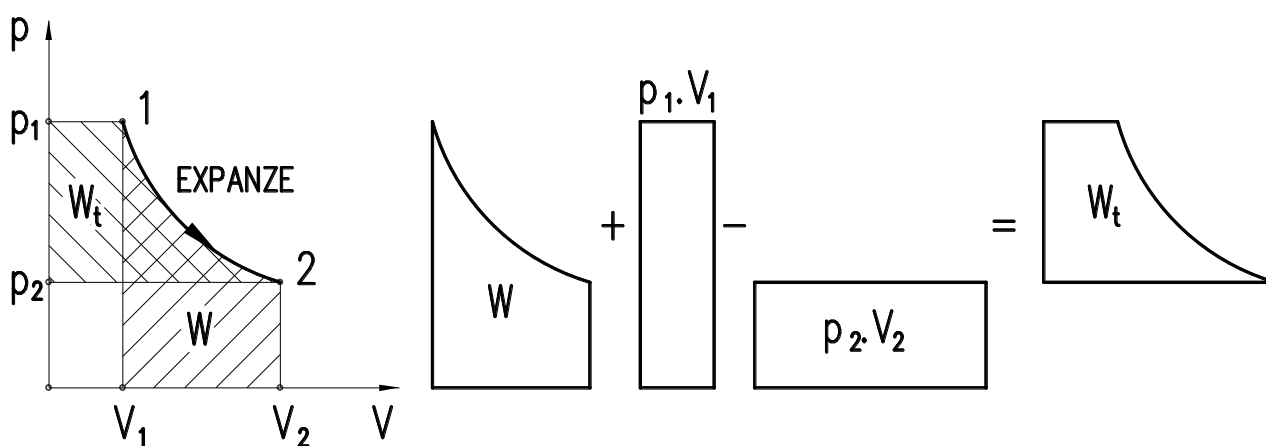
$$p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1$$

$$U_2 + V_2 \cdot p_2 - U_1 - V_1 \cdot p_1 = Q - W + p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1$$

$$U_2 + p_2 \cdot V_2 - (U_1 + p_1 \cdot V_1) = Q - (W - p_2 \cdot V_2 + p_1 \cdot V_1)$$

Přičemž výraz $W + p_1 \cdot V_1 - p_2 \cdot V_2 = W_t$ = technická práce W_t

Technická práce W_t je v $p - V$ diagramu **vyjádřena plochou pod křivkou změny stavu směrem na osu tlaku**.



Výraz $p \cdot V$ vyjadřuje tlakovou energii $m [kg]$ plynu.

Součet vnitřní energie U a tlakové energie $p \cdot V$ nazýváme **entalpie**, kterou označujeme I .

Potom 2. tvar prvního zákona termodynamiky zní:

$$I_2 - I_1 = Q - W_t$$

Pro 1 kg platí: $\Delta i = i_2 - i_1 = q - w_t$

Entalpie i podobně jako vnitřní energie ideálního plynu u závisí pouze na teplotě plynu.

$$i = c_p \cdot T$$

Vztah mezi vnitřní energií a entalpií je:

$$\frac{i}{u} = \frac{c_p \cdot \Delta T}{c_v \cdot \Delta T} = \frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

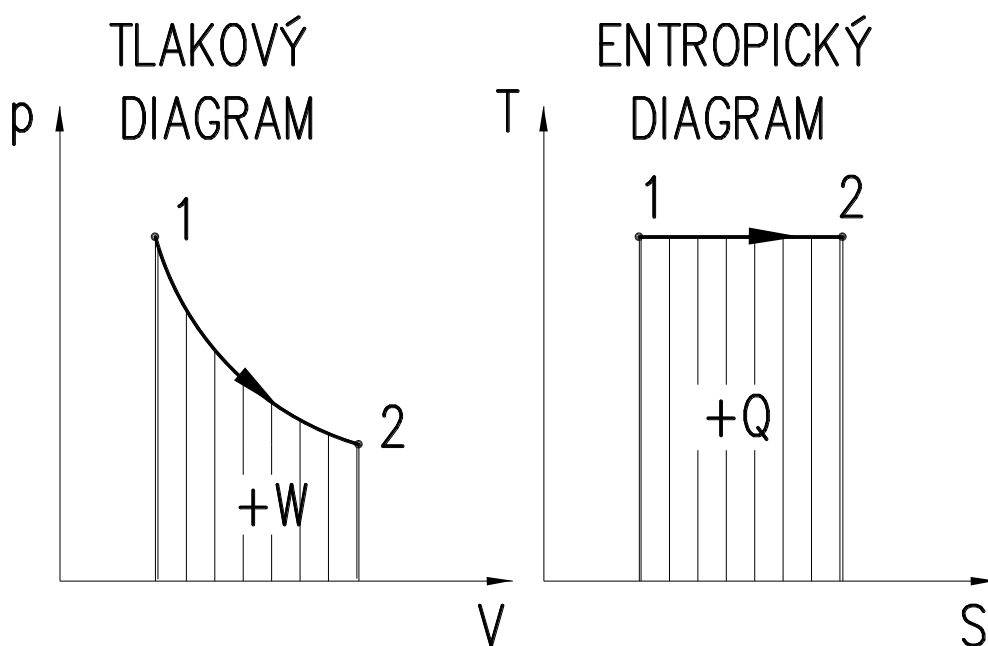
(κ – [kapa] Poissonova konstanta nebo-li adiabatický exponent).

5.4.6 Entropie (S, s)

Entropii označujeme S a její změnu můžeme vyjádřit jednoduše jen v těch výjimečných případech, kdy se u sdílení tepla teplota nemění. Např. při izotermické kompresi nebo expanzi a při změnách skupenství. Změna entropie je v těchto případech dána podílem tepla a absolutní teploty.

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T}$$

Entropie nám umožňuje znázornit množství tepla dodaného nebo odvedeného při určité změně stavu. V $p - V$ diagramu plocha pod křivkou vyjadřuje práci, v entropickém diagramu $T - S$ plocha vyjadřuje množství sdíleného tepla.



Přivedené teplo $+Q$ je v $T - S$ diagramu znázorněno plochou, kterou objíždíme ve směru chodu hodinových ručiček.

Vnitřní energie u , entalpie i a entropie s jsou tzv. odvozené stavové veličiny, které se nedají měřit.

Pracujeme s jejich přírůstky Δu , Δs , Δi .

$+W$ – práce získaná, odebraná $\Delta u = q - w$;

$-W$ – práce spotřebovaná, přivedená $\Delta u = q + w$;

$+Q$ – teplo přivedené;

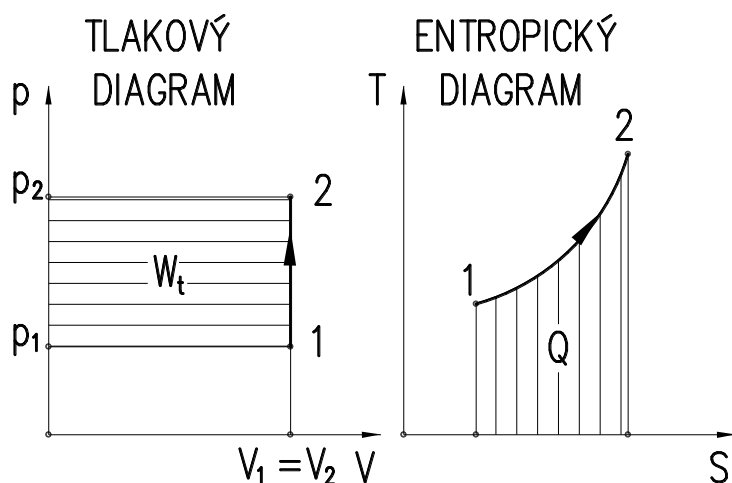
$-Q$ – teplo odvedené.

5.4.7 Vratné změny stavu ideálního plynu

Vratné změny stavu jsou ideální změny, u kterých předpokládáme, že v každém okamžiku je ideální plyn v rovnovážném stavu – v celém objemu má stejné stavové veličiny.

5.4.8 Změna za stálého objemu – izochorická ($V = \text{konst.}$)

Izochorický ohřev plynu:



$$p \cdot V = m \cdot r \cdot T$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = m \cdot r = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

$$V_1 = V_2 = V$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \text{ nebo } \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Tlak i teplotu udáváme
v absolutních hodnotách.

Jednorázová práce $W = 0$

$W_t = (p_1 - p_2) \cdot V$ Při ohřevu je W_t záporná, musíme ji dodat, při ochlazení je W_t kladná, získaná.

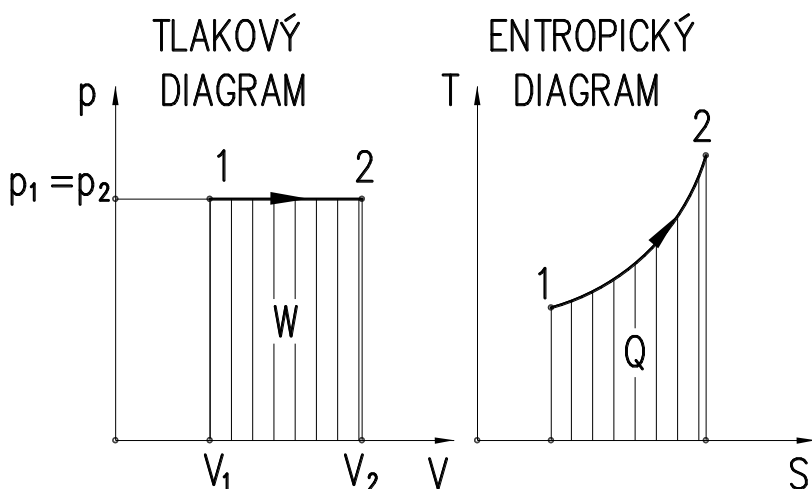
$$U_2 - U_1 = Q - W$$

$$W = 0$$

Přivedené teplo $Q = \Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T$

$$q = c_v \cdot \Delta T = c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

5.4.9 Změna za stálého tlaku – izobarická ($p = \text{konst.}$)



$$p_1 = p_2 = \text{konst} = p$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \text{ nebo } \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

absolutní práce:

$$W = p \cdot (V_2 - V_1)$$

technická práce $W_t = 0$

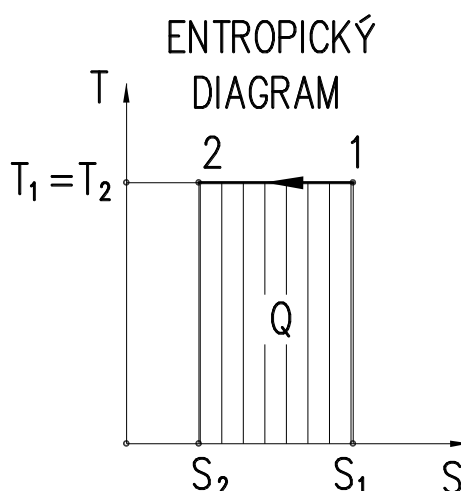
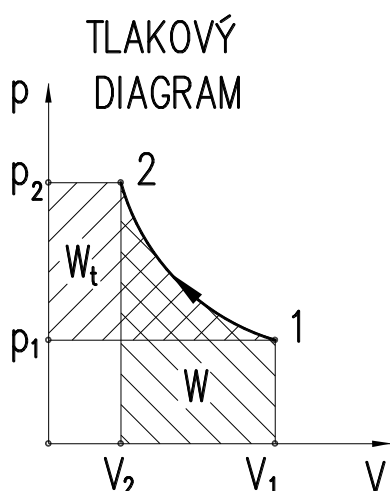
$$I_2 - I_1 = Q - W_t$$

$$Q = I_2 - I_1 = m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Přivedené teplo:

$$q = i_2 - i_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

5.4.10 Změna za stálé teploty – izotermická (T = konst.)



Tato změna je v p – V diagramu je znázorněna rovnouosou hyperbolou. Čím nižší je teplota, tím více se izoterma přibližuje osám p, V.

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \text{konst}$$

Entalpie $\Delta I = c_p \cdot m \cdot \Delta T$

Vnitřní energie $\Delta U = c_v \cdot m \cdot \Delta T$

$$\Delta T = 0 \text{ protože } T = \text{konst.}$$

$$I_2 - I_1 = Q - W_T \rightarrow 0 = Q - W_T \rightarrow Q = W_t$$

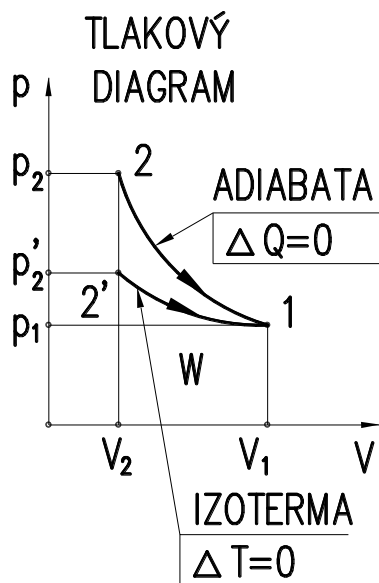
$$U_2 - U_1 = Q - W \rightarrow 0 = Q - W \rightarrow Q = W$$

$$\text{Potom: } W = W_t = Q = m \cdot r \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = m \cdot r \cdot T \cdot 2,3 \cdot \log \frac{V_2}{V_1} = 2,3 \cdot m \cdot r \cdot T \cdot \log \frac{p_1}{p_2}$$

Při izotermické kompresi je práce i teplo záporné, při izotermické expanzi kladné.

5.4.11 Změna bez výměny tepla s okolím – izoentropická (adiabatická) – $\Delta q = 0$

Adiabatická změna stavu je změna bez výměny tepla s okolím. Za takové změny považujeme změny, které probíhají velmi rychle. V praxi většina kompresí a expanzí v tepelných strojích. Rovnici adiabatické změny můžeme odvodit jen za použití vyšší matematiky. V p – V diagramu je adiabata znázorněna hyperbolou vyššího řádu.



$$p \cdot V^\kappa = \text{konst}$$

$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

Základní rovnice ideálního plynu:

$$p \cdot V = m \cdot r \cdot T \rightarrow p = \frac{m \cdot r \cdot T}{V}$$

$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa$$

$$\frac{m \cdot r \cdot T_1}{V_1} \cdot V_1^\kappa = \frac{m \cdot r \cdot T_2}{V_2} \cdot V_2^\kappa$$

$$T_1 \cdot V_1^{\kappa-1} = T_2 \cdot V_2^{\kappa-1} \rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

Podobně:

$$V = \frac{m \cdot r \cdot T}{p}$$

$$p_1 \cdot \left(\frac{m \cdot r \cdot T_1}{p_1} \right)^\kappa = p_2 \cdot \left(\frac{m \cdot r \cdot T_2}{p_2} \right)^\kappa$$

$$\frac{p_1 \cdot T_1^\kappa}{p_1^\kappa} = \frac{p_2 \cdot T_2^\kappa}{p_2^\kappa}$$

$$\frac{T_1^\kappa}{p_1^{\kappa-1}} = \frac{T_2^\kappa}{p_2^{\kappa-1}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa$$

Vztah pro absolutní a technickou práci můžeme odvodit z rovnice prvního zákona termodynamiky.

Pro adiabatickou změnu platí: vnitřní energie $q = \frac{Q}{m} = 0$

$$u_2 - u_1 = \overset{=0}{\tilde{q}} - w, \quad u = c_v \cdot \Delta T, \quad c_v = \frac{r}{\kappa - 1}$$

$$w = u_1 - u_2 = c_v \cdot (T_1 - T_2)$$

$$w = \frac{r}{\kappa - 1} \cdot (T_1 - T_2) = \frac{r \cdot T_1}{\kappa - 1} \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Vztah pro absolutní práci 1 kg plynu:

$$w = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot r \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Pro konkrétní množství plynu:

$$W = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot m \cdot r \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Podle toho, které stavové veličiny známe, můžeme za výraz $m \cdot r \cdot T_1$ dosadit $p_1 \cdot V_1$ a za poměr

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \text{ potom získáme např. vztah:}$$

$$W = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot p_1 \cdot V_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

Stejným způsobem můžeme odvodit vztah pro technickou práci:

$$i_2 - i_1 = q - w_t = 0 - w_t = -w_t \quad w_t = 0$$

$$(i = c_p \cdot T)$$

$$w_t = i_1 - i_2 = c_p \cdot (T_1 - T_2); \quad c_p = \kappa \cdot c_v = \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1}$$

$$w_t = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot r \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$W_t = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot m \cdot r \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$W_t = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot p_1 \cdot V_1 \cdot \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)$$

Př.: Pístový kompresor adiabaticky ($\Delta Q = 0$) stlačuje 1 m³/s vzduchu z tlaku $p_1 = 0,1$ MPa na tlak $p_2 = 0,5$ MPa. Určete teplotu T_2 po stlačení, je-li původní teplota $T_1 = 20$ °C = 293 K a výkon hnacího elektromotoru.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \overbrace{293}^{273+20} \cdot \left(\frac{0,5}{0,1} \right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 464 \text{ K} = 191 \text{ °C}$$

$$m \cdot r \cdot T_1 = p_1 \cdot V_1$$

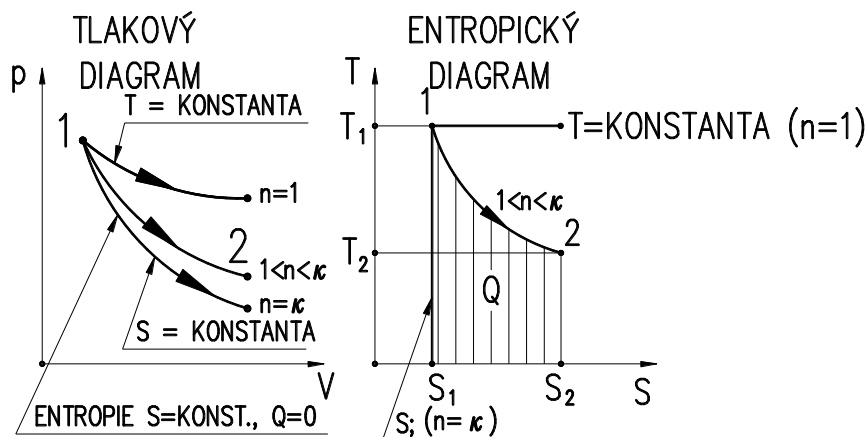
$$P = \frac{W_t}{t} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot m \cdot r \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot p_1 \cdot V_1 \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{\overbrace{\kappa}^{=1,4}}{\kappa - 1} \cdot 0,1 \cdot 10^6 \cdot \overbrace{1}^{\frac{\text{m}^3}{\text{s}}} \cdot \left(1 - \frac{464}{293} \right) =$$

$$= -204266 \text{ W}$$

– znamená, že práce byla spotřebovaná.

5.4.12 Polytropická změna stavu

Jedná se o obecnou vratnou změnu stavu. V $p - V$ diagramu je znázorněna hyperbolou vyššího řádu, která je vyjádřena rovnicí:



$$p \cdot V^n = \text{konst}$$

n – polytropický exponent

$$1 < n < \kappa$$

Izoterma $n = 1$

Adiabata $n = \kappa$

κ – polytropický exponent

$$p_1 \cdot V_1^n = p_2 \cdot V_2^n$$

$$p_1 \cdot V_1 = m \cdot r \cdot T_1$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^n = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{n-1}$$

Absolutní práce:

$$W = \frac{1}{n-1} \cdot p_1 \cdot V_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$$

Technická práce:

$$W_t = \frac{n}{n-1} \cdot p_1 \cdot V_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$$

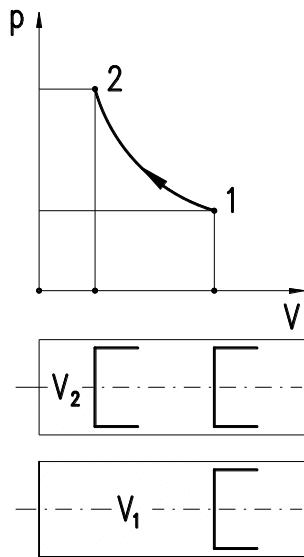
Př.: Pístový kompresor nasává objem $V_1 = 10 \text{ m}^3/\text{h}$ a polytropicky ($1 < n < \kappa$) ho stlačuje z tlaku $p_1 = 0,1 \text{ MPa}$ na tlak $p_2 = 0,6 \text{ MPa}$. Teplota nasávaného plynu $t_1 = 17^\circ\text{C}$. Určete teplotu a objem na konci komprese. Dále určete teoretický výkon hnacího motoru. $n = 1,35$.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{273+17}{290} \cdot \left(\frac{0,6}{0,1} \right)^{\frac{1,35-1}{1,35}} = 461,5 \text{ K}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{n-1}} \rightarrow V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{n-1}} = 10 \cdot \left(\frac{290}{461,5} \right)^{\frac{1}{0,35}} = 2,65 \text{ m}^3$$

$$P = \frac{W_t}{t} = \frac{\overbrace{1}^{1\text{hod.}=3600\text{s}}}{3600} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot p_1 \cdot V_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] =$$

$$= \frac{1}{3600} \cdot \frac{1,35}{0,35} \cdot 0,1 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot \left[1 - \left(\frac{0,6}{0,1} \right)^{\frac{0,35}{1,35}} \right] = -633,6 \text{ W}$$



Př.: Kompresní poměr spalovacího motoru $\varepsilon = \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = 8$. Jaká

je teplota vzduchu na konci adiabatické komprese?

($\Delta Q = 0$ – bez výměny tepla s okolím).

$$T_1 = 27^\circ\text{C}, T_2 = ?, \kappa = 1,4$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} = \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \varepsilon^{\kappa-1}$$

$$T_2 = \overbrace{300}^{273+27} \cdot 8^{0,4} = 689 \text{ K} = 416^\circ\text{C}$$

Př.: Ve spalovacím prostoru zážehového motoru se spaluje směs benzínových par a vzduchu přibližně za konstantního objemu. Jak stoupnou tlak a teplota plynů ve válci po spálení směsi? Stlačená směs má tlak $p_1 = 0,5 \text{ MPa}$ a teplotu $t_1 = 207^\circ\text{C}$. Spálením 1 kg směsi se vyvine $Q = 1600 \text{ kJ}$ tepla. Měrné

teplo za konstantního objemu $c_v = 960 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

$$Q = m \cdot c_v \cdot (t_2 - t_1) \rightarrow t_2 = \frac{Q}{m \cdot c_v} + t_1 = \frac{1600000}{1 \cdot 960} + 207 = 1874^\circ\text{C} = 2147 \text{ K}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \rightarrow p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 500000 \cdot \frac{2147}{\overbrace{480}^{273+207}} = 2236458 \text{ Pa} = 2,236 \text{ MPa}$$

Př.: Izotermický kompresor má při teplotě $t = 17^\circ\text{C}$ stlačovat za každou sekundu $V_1 = 50 \text{ l}$ vzduchu z tlaku $p_1 = 0,1 \text{ MPa}$ na tlak $p_2 = 0,5 \text{ MPa}$. Jaký je konečný objem po stlačení a potřebný příkon ideálního kompresoru?

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2} = \frac{0,1 \cdot 0,05}{0,5} = 0,01 \text{ m}^3 = 10 \text{ l}$$

$$P = \frac{W_t}{t} = \frac{m \cdot r \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}}{t} = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}}{t} = \frac{10^6 \cdot 0,1 \cdot 0,05 \cdot \ln \frac{0,1}{0,5}}{1} = -8047 \text{ W}$$

Poznámka: Při izotermické kompresi je práce záporná, při expanzi kladná.

Př.: Ohříváč vzduchu pro vysokou pec spotřebuje za 2 hodiny $Q_m = 45000 \text{ m}^3$ vysokopecního plynu o výhřevnosti $q = 3150 \text{ kJ/m}^3$. V ohříváči se ohřeje za tuto dobu 133 000 kg vzduchu z teploty 30°C na teplotu 800°C při konstantním tlaku. Kolik tepla Q spotřebuje vzduch na své ohřátí a jaká je termická účinnost ohříváče? $\kappa = 1,4$; $r = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

Měrné teplo za konstantního tlaku:

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot r = \frac{1,4}{0,4} \cdot 287 = 1004,5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$Q = m \cdot c_p \cdot \Delta t = 133000 \cdot 1004,5 \cdot (800 - 30) = 1,03 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

Přivedené teplo:

$$Q_p = Q_m \cdot q = 45000 \cdot 3150000 = 1,42 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

$$\eta_t = \frac{Q}{Q_p} = \frac{1,03 \cdot 10^{11}}{1,42 \cdot 10^{11}} = 0,726 = 72,6\%$$

Př.: Pět kg vzduchu o tlaku $p = 0,8 \text{ MPa}$ a teplotě $t_1 = 47^\circ\text{C}$ se přivede $Q = 120 \text{ kJ}$ tepla a současně se přivede $W = 110 \text{ kJ}$ objemové práce. Jaká bude konečná teplota vzduchu?

$$c_v = 714 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

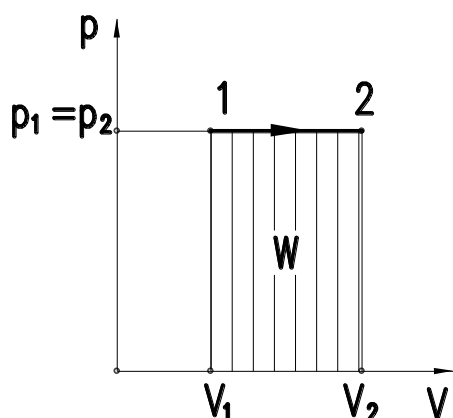
První zákon termodynamiky:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - \overset{\text{Odebraná práce}}{\widetilde{W}} = c_v \cdot (T_2 - T_1) \cdot m; \quad U = m \cdot u; \quad u = c_v \cdot \Delta T$$

$$T_2 = \frac{Q - W}{c_v \cdot m} + T_1 = \frac{120000 - (-110000)}{714 \cdot 5} + \underbrace{320}_{273+47} = 384 \text{ K}$$

Př.: Kolik tepla Q je třeba přivést $m = 2,3$ kg kyslíku o tlaku $p_1 = 0,8$ MPa a teplotě $t_1 = 37^\circ\text{C}$, aby vykonal při nezměněném tlaku absolutní práci $W = 85$ kJ? Jaký bude konečný V_2 , t_2 ?

$$r = 64,06 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, c_p = 917 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$



Základní zákon ideálního plynu:

$$p_1 \cdot V_1 = m \cdot r \cdot T_1 \rightarrow V_1 = \frac{m \cdot r \cdot T_1}{p_1} = \frac{2,3 \cdot 64,06 \cdot \overbrace{310}^{273+37}}{0,8 \cdot 10^6} = 0,057 \text{ m}^3$$

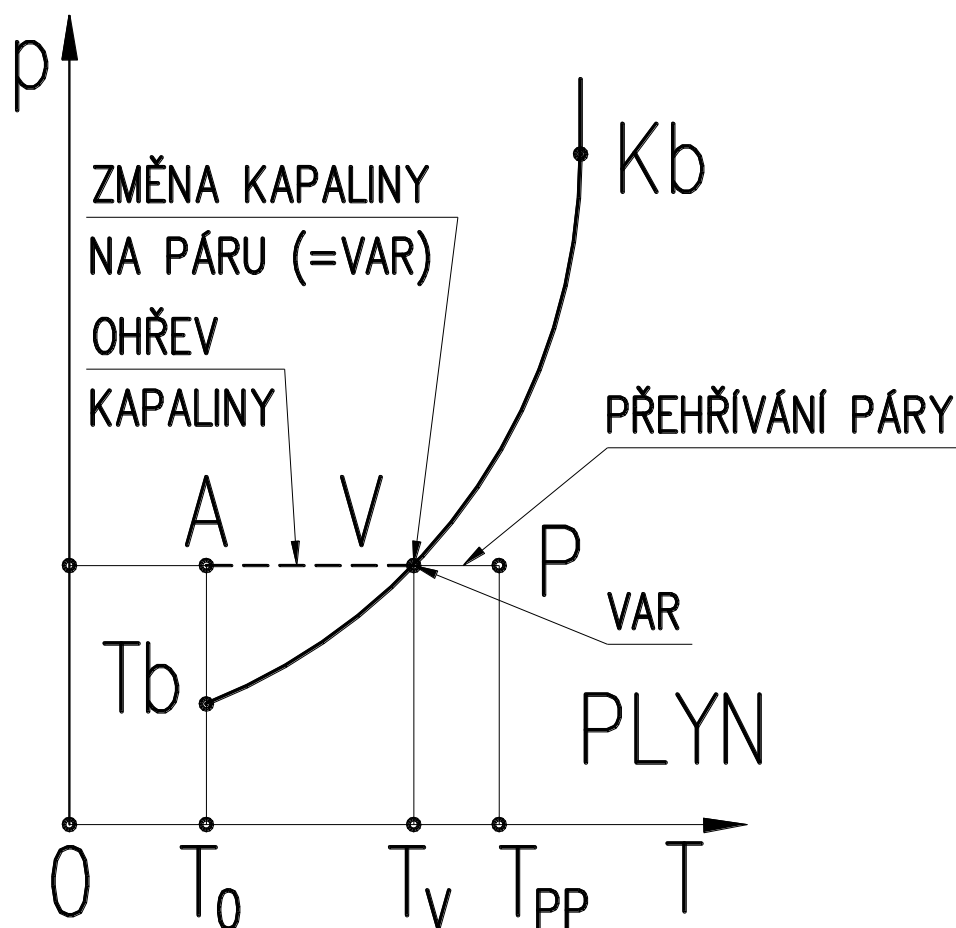
$$W = p_1 \cdot (V_2 - V_1) \rightarrow V_2 = \frac{W}{p_1} + V_1 = \frac{85000}{0,8 \cdot 10^6} + 0,057 = 0,163 \text{ m}^3$$

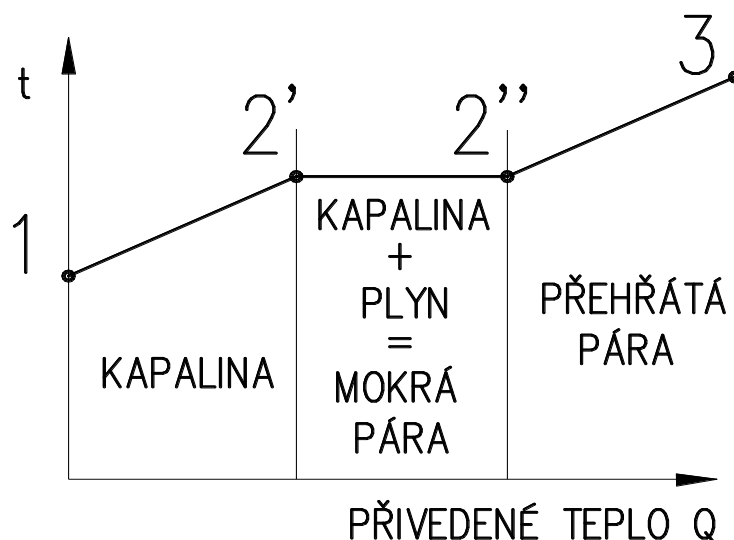
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{T_1 \cdot V_2}{V_1} = \frac{310 \cdot 0,163}{0,057} = 886 \text{ K}$$

$$Q = m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) = 2,3 \cdot 917 \cdot (886 - 310) = 1214842 \text{ J}$$

5.5 Termodynamika par

5.5.1 Základní pojmy





T_o – teplota ohřevu;

T_v – teplota varu;

T_{pp} – teplota přehřáté páry;

T_b – trojný bod;

K_b – kritický bod.

Přivádíme-li vodě (stav 1) určité teploty teplo, poroste její teplota ($\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta t$) až do stavu 2', který nazýváme **syťou kapalinou**. Při dalším přívodu tepla za stálého tlaku dojde ke změně skupenství, voda se změní v páru. Stav na konci odpařování 2'' označujeme jako **suchou syťou páru**. Vztah mezi začátkem a koncem odpařování 2' – 2'' označujeme jako **mokrou páru**. Důležitým pojmem mokré páry je tzv. **suchost páry**. Označuje se:

$$x = \frac{m_p}{m_v + m_p}$$

m_p – množství syté páry (plynu);

$m_v + m_p$ – množství mokré páry (voda + plyn).

Suchost nám vyjadřuje, z kolika procent je voda přeměněna v páru. **$x = 0$ je pro syťou kapalinu, $x = 1$ je pro syťou páru.**

Mokrá pára se suchostí $x = 0,9$ je někdy označována jako **vlhká pára**. Při dalším přívodu tepla poroste teplota suché syté páry podle vztahu $\Delta Q = m \cdot c_{p(v)} \cdot \Delta t$. Tento stav nazýváme **přehřátou parou**.

Stavové veličiny **syté kapaliny** jsou označovány **jednou čárkou**: E', v', i', u'

Stavové veličiny **mokré páry** jsou označovány indexem **x**: $t_x, v_x, i_x, \dots$

Stavové veličiny **suché syté páry** jsou označovány **dvěma čárkami**: $v'', u'', i'' \dots$

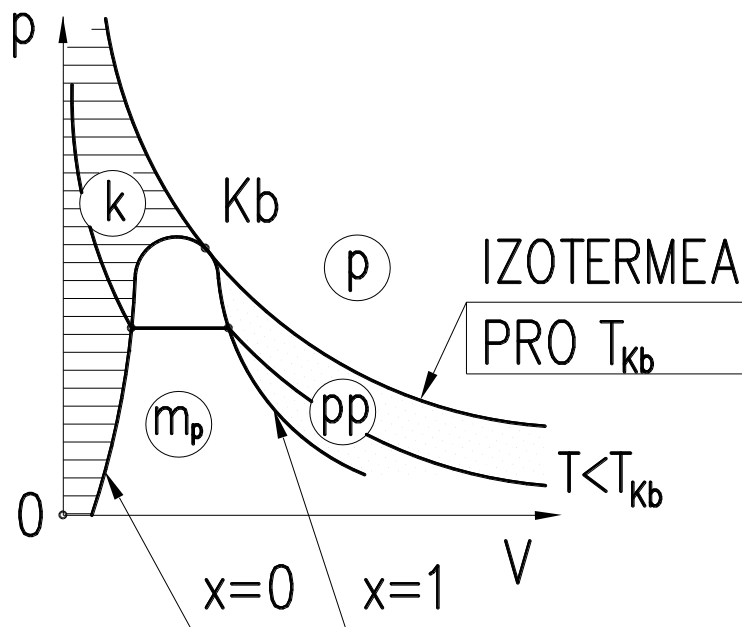
Stavové veličiny **přehřáté páry** nejsou označeny nijak.

Plyny jsou vlastně vysoce přehřáté páry.

5.5.2 Diagramy vodní páry

Činnost různých strojů založených na využití par se znázorňuje v diagramech. Zde bývají znázorněny křivky konstantního tlaku, objemu, teploty a konst. suchosti. Jakýkoliv stav páry se dá najít jako průsečík stavových veličin.

a) **p – V diagram:** plocha vyjadřuje množství vykonané nebo spotřebované práce.



k – kapalina;

m_p – mokrá kapalina;

p_p – přehřátá kapalina;

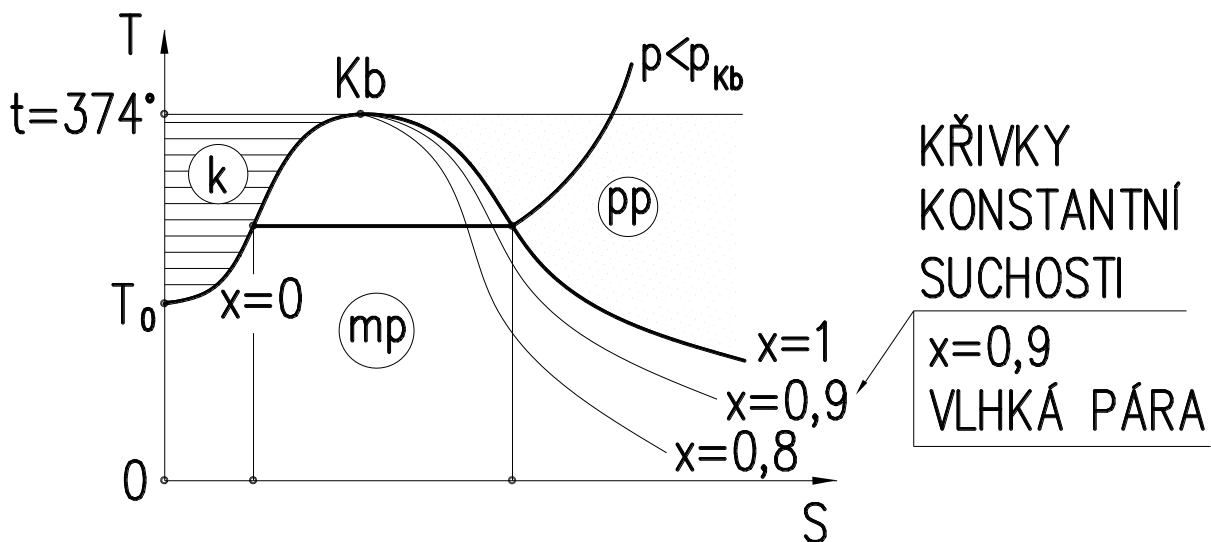
p – plyn;

Kb pro vodu:

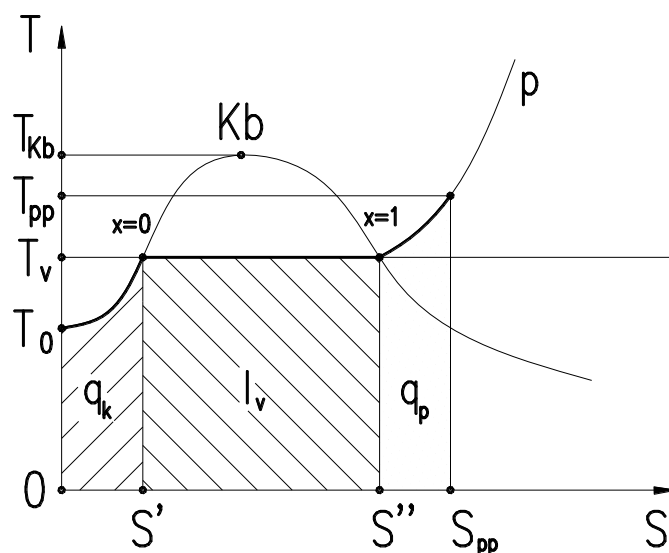
$T_{kb} = 374^\circ C$;

$p_{kb} = 21,1 MPa$.

b) **T – s diagram:** plocha pod křivkou změny stavu vyjadřuje množství tepla.



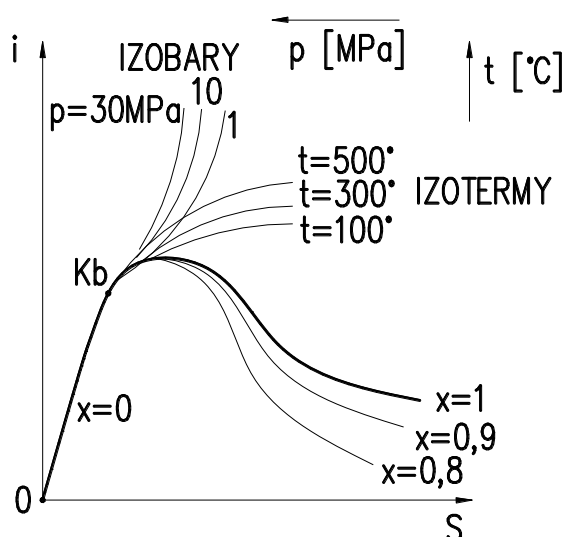
KŘIVKY
KONSTANTNÍ
SUCHOSTI
 $x=0,9$
VLHKÁ PÁRA



Výrobní teplo páry: $q_v = q_k + l_v + q_p$

q_k – kapalinové teplo, l_v – výparné teplo, q_p – přehřívací teplo.

c) **i – s diagram:**



V tomto $i - s$ diagramu odečítáme množství tepla potřebného k určité změně stavu odečítáme jako rozdíl entalpií.

$$q = i_2 - i_1 = \Delta i$$

Použití u turbín.

5.5.3 Stavové veličiny vodní páry

Páry jsou vzdušniny, které jsou při provozních teplotách blízko stavu, ve kterém začínají kapalnět.

Proto u vody, čpavku, lihu, benzínu ... hovoříme o parách a ne o plynech.

Pro vodní páru má stavová rovnice tvar:

$$p \cdot v = r \cdot T$$

$$p \cdot (v + 0,016) = r \cdot T$$

Tato rovnice platí s dostatečnou přesností pro sytou nebo mírně přehřátou páru.

$$\boxed{p \cdot v = r \cdot T}$$

Vznik páry a kondenzace par je dějem izobarickoizotermickým ($p = \text{konst.}$, $T = \text{konst.}$).

$$p = p' = p'' = \text{konst}$$

$$t = t' = t'' = \text{konst}$$

$$p \cdot v = r \cdot T$$

5.5.4 Kapalinové teplo

Je teplo, které se přivede kapalině (vodě) při ohřátí z teploty 0°C na teplotu bodu varu.

$$q_K = c_s \cdot t' \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

c_s – střední měrné teplo;

t' – teplota bodu varu.

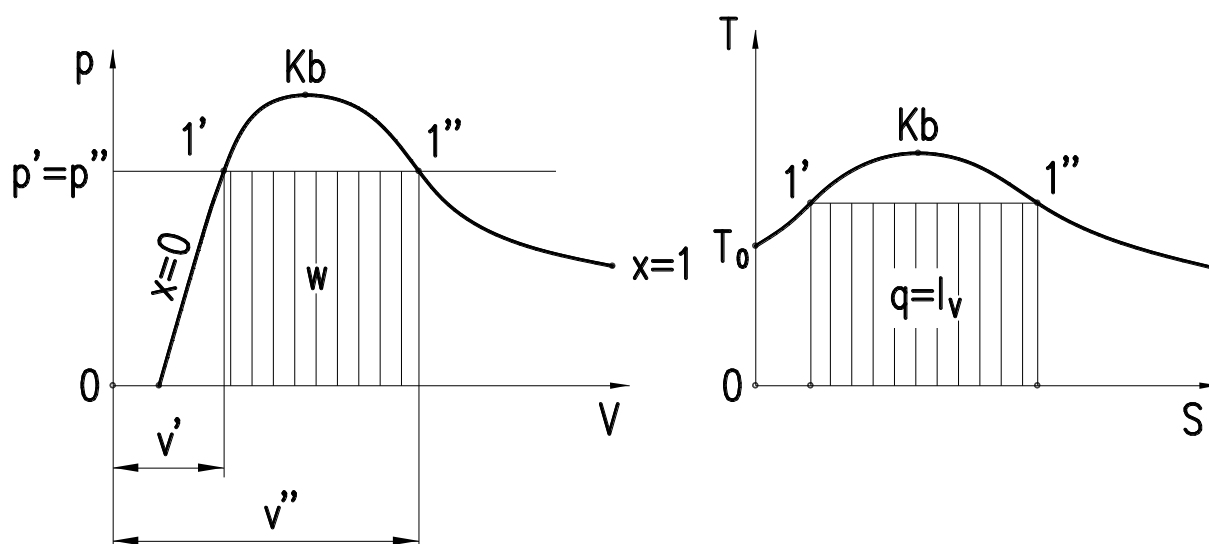
Teplo, které se přivede 1 kg kapaliny na její změnu v páru, je **měrné výparné teplo** $l_v \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$. Toto

teplo se zmenšuje s tlakem, při kterém dochází k varu. Zanedbáme-li nepatrnou práci při zvětšení objemu kapaliny, platí, že:

$$u' \doteq i' \approx q_K = c_s \cdot t'$$

apostrof ' znamená sytá kapalina

Při výrobě suché syté páry za stálého tlaku se výparné teplo l_v využije na zvětšení vnitřní energie páry.



$$q = l_v$$

Entalpie suché syté páry:

$$i'' - i' = l_v \rightarrow i'' = i' + l_v \doteq q_K + l_v$$

Entalpie suché syté páry = kapalinové teplo + výparné teplo.

5.5.5 Mokrý pára

1 kg mokrý (vlhký) páry obsahuje x kg suché syté páry a $(1 - x)$ kg syté kapaliny.

Veličina x vyjadřuje tzv. **suchost páry**, udává, z kolika % je kapalina přeměněna v páru. Stavové veličiny mokré páry jsou označovány indexem x .

$$\text{Měrný objem mokré páry: } v_x = x \cdot v'' + (1 - x) \cdot v' = x \cdot v'' + v' - x \cdot v' = v' + x \cdot (v'' - v')$$

U vyšší suchosti můžeme s dostatečnou přesností psát:

$$v_x = x \cdot v''$$

$$\text{Entalpie mokré páry: } i_x = i' + x \cdot l_v$$

$$\text{Pro sytou páru } x = 1 \text{ platí: } i'' = i' + l_v$$

v'' – objem suché syté páry;

l_v – výparné teplo.

5.5.6 Přehřátá pára

Na přehřátí 1 kg suché syté páry za stálého tlaku p z teploty t'' na teplotu t potřebujeme:

$$q_{př} = c_{ps} \cdot (t - t'') \left[\frac{J}{kg} \right]$$

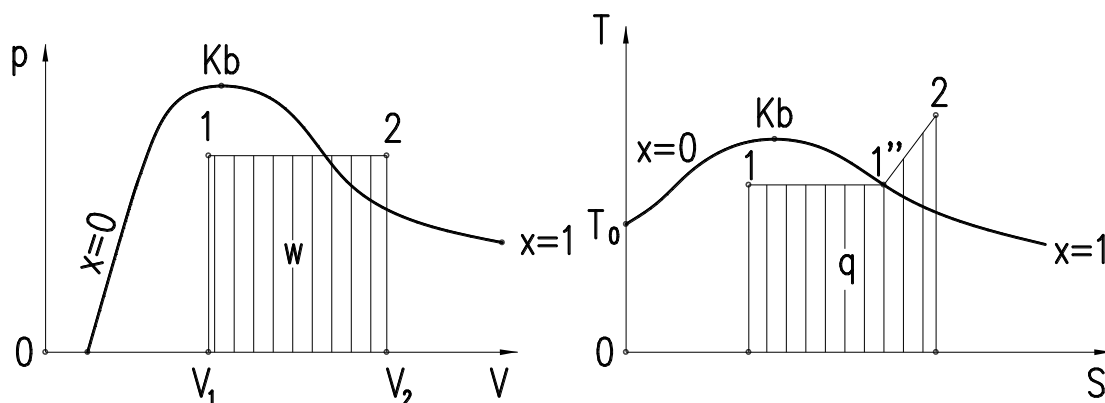
c_{ps} – střední měrné teplo za stálého tlaku:

U přehřáté páry je měrné teplo c_p značně závislé na tlaku a teplotě páry. Proto c_{ps} určíme pro střední teplotu dané změny stavu.

$$i_{pp} = \underbrace{i' + l_v}_{i''} + c_{ps} \cdot (t - t'')$$

5.5.7 Změny stavu vodní páry

a) Změna za stálého tlaku – izobarická:



$$w = p \cdot (v_2 - v_1)$$

$$w_t = 0$$

$$q = (1-x) \cdot l_v + c_{ps} \cdot (t - t'') = i_2 - i_1$$

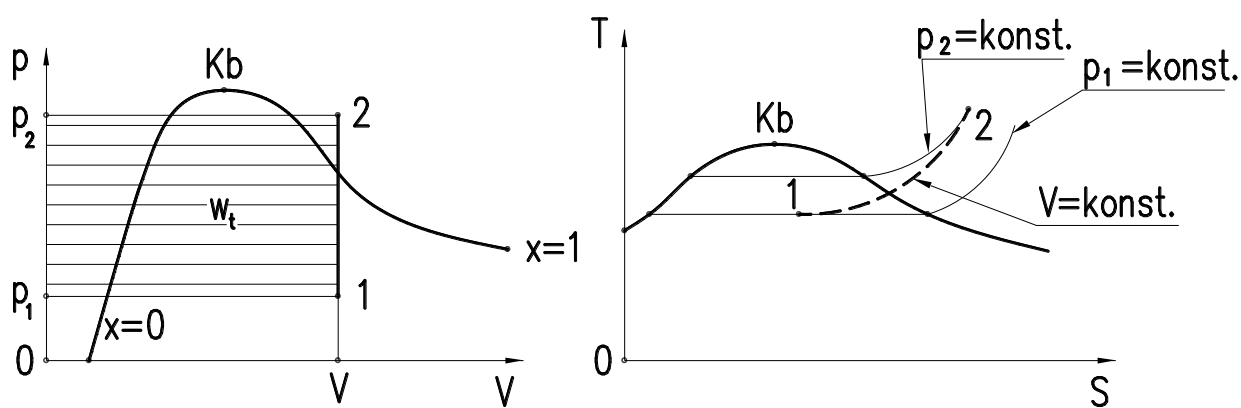
$(1-x) \cdot l_v$ – teplo potřebné pro přeměnu zbytku vody na páru;

$c_{ps} \cdot (t - t'')$ – teplo potřebné pro přehřátí.

Plocha pod křivkou v $p-v$ diagramu znázorňuje množství práce 1 kg páry.

V $T-s$ diagramu množství tepla potřebného ke změně stavu.

b) Změna za stálého objemu – izochorická:



$$w_t = v \cdot (p_2 - p_1)$$

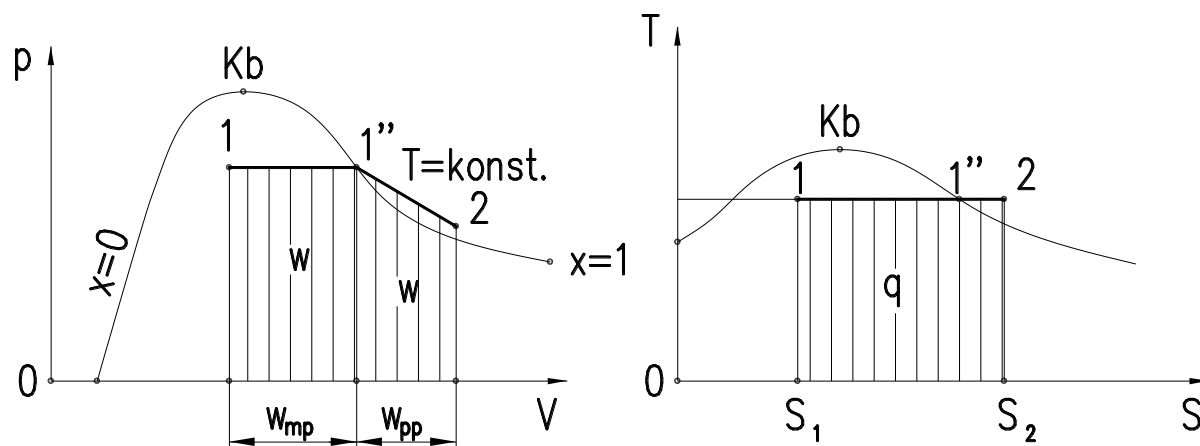
$$w = 0$$

$$\Delta i = q - w_t \rightarrow q = \Delta i + w_t$$

$$q = i_2 - i_1 - v \cdot (p_2 - p_1)$$

c) Změna za stálé teploty – izotermická:

Je totožná s izobarickou pro mokrou páru.

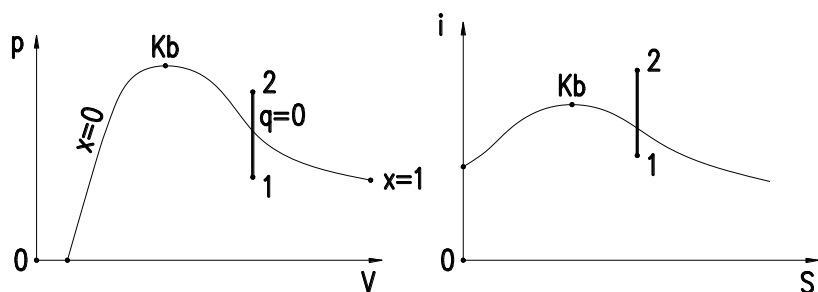


Pro oblast přehřátí páry: $w_{pp} = w_{t\ pp} = p_1'' \cdot v_1'' \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$

$$w_{celk} = w_{mp} + w_{pp} = p \cdot (v_1'' - v_1) + p_1'' \cdot v_1'' \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$q = T \cdot (s_2 - s_1)$$

d) **Adiabatická změna stavu – bez sdílení tepla $q = 0$ (izoentropická):**

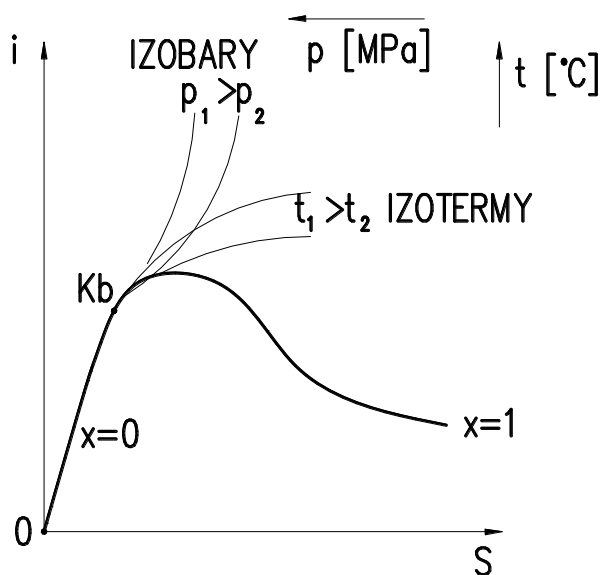


5.5.8 Škrčení vodní páry

V armaturách, regulačních ventilech, clonách ..., dochází při průchodu páry k termodynamickému ději, který nazýváme škrčení. Stejně jako u plynů škrčení vodní páry je změna, při které se nemění entalpie.

$$i_2 = i_1 = konst.$$

Diagram $i - s$:



Při škrčení se snižuje tlak, ale nezískáváme žádnou užitečnou práci ($w_t = 0$). Pro adiabatické škrčení $q = 0$ tedy platí:

$$i_2 - i_1 = konst.$$

$$c_p \cdot (T_2 - T_1) = 0 \rightarrow T_2 = T_1$$

c_p – střední měrné teplo za stálého tlaku.

Při škrcení skutečných plynů a par však dochází ke snižování teploty. Přesto se mokrá pára vysušuje, suchá sytá pára se stává přehřátou. U přehřáté páry roste její přehřátí. Kapalina přechází do stavu mokré páry.

Jedná se o nevratnou změnu stavu.

Př.: Určete tepelný výkon Q_τ přehříváče vodní páry. Tlak páry $p = 10 \text{ MPa}$, $t_{pp} = 500^\circ\text{C}$, hmotnostní průtok $Q_m = 200 \text{ t/h}$. Určete střední měrné teplo.

$$Q_m = 200 \text{ 000 kg/h} = \frac{200 \text{ 000}}{3600} = 55,6 \text{ kg/s}.$$

$$\text{Ze strojnických tabulek str. 65 přehřátá pára: } i = H = 3372 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

$$\text{Z tabulek: str. 67 sytá pára: } i'' = H'' = 2725 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, t'' = 310,96^\circ\text{C}$$

$$\text{Jen přehříváme: } w_t = 0 \rightarrow \Delta i = i - i'' = q - w_T = q$$

$$Q_\tau = Q_m \cdot q = Q_m \cdot (i - i'') = 55,6 \cdot (3372000 - 2725000) \cong 36 \text{ 000 000 W} \doteq 36 \text{ MW}$$

c_{pps} – střední měrné teplo při konstantním tlaku.

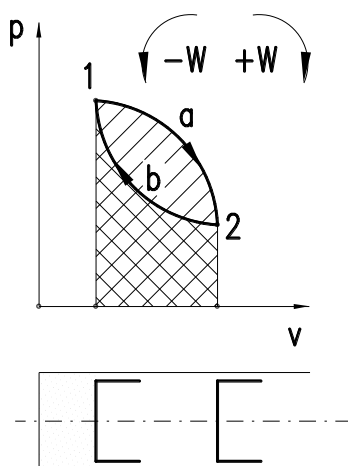
$$\Delta i = i - i'' = c_{pps} \cdot (t - t'') \rightarrow c_{pps} = \frac{i - i''}{t - t''} = \frac{3372000 - 2725000}{500 - 310,96} = 3423 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

5.6 Tepelné oběhy

Při změnách stavu se teplo vzdušnin mění na mechanickou práci. Z hlediska praxe je požadavek, aby přeměna tepla na práci nebyla jen jednorázová, ale plynulá. Tento požadavek se dá splnit za předpokladu, že se vzdušina bude vracet po řadě tepelných změn jinou cestou do původního stavu. Uzavřený sled změn tvoří tepelný cyklus, který je v tepelných diagramech znázorněn uzavřenou křivkou. Cykly, které se periodicky opakují s určitým množstvím měrné látky, označujeme jako uzavřené (např. pracovní cyklus kondenzační parní turbíny).

U většiny strojů (hlavně výfukových) přivádíme při každém cyklu novou vzdušninu se stejným počátečním stavem.

Tepelné změny stavu jsou u skutečných strojů složité. Abychom mohli matematicky porovnávat jednotlivé oběhy, nahrazujeme skutečný oběh oběhem ideálním, složeným z jednotlivých vratných změn stavů, které se skutečným změnám nejvíc přibližují.



V $p - V$ diagramu křivka $1-2$ znázorňuje expanzi. Plocha pod touto křivkou vyjadřuje **práci získanou expanzí**. Křivka $2-1$ znázorňuje kompresi vzdušiny do původního stavu. Plocha pod touto křivkou znázorňuje **práci spotřebovanou při kompresi**. Má-li se při tomto pracovním cyklu získat užitečná práce, musí být expanzní práce větší než práce kompresní. → Expanze musí probíhat při vyšších tlacích a teplotách než komprese. Abychom mohli posoudit dokonalost pracovních cyklů určitého pracovního stroje, zjišťujeme tzv. termickou (tepelnou) účinnost, která nám vyjadřuje, jakou část přivedeného tepla jsme využili k vykonání práce.

$$\eta_t = \frac{q}{q_p} = \frac{q_p - q_o}{q_p} = 1 - \frac{q_o}{q_p}$$

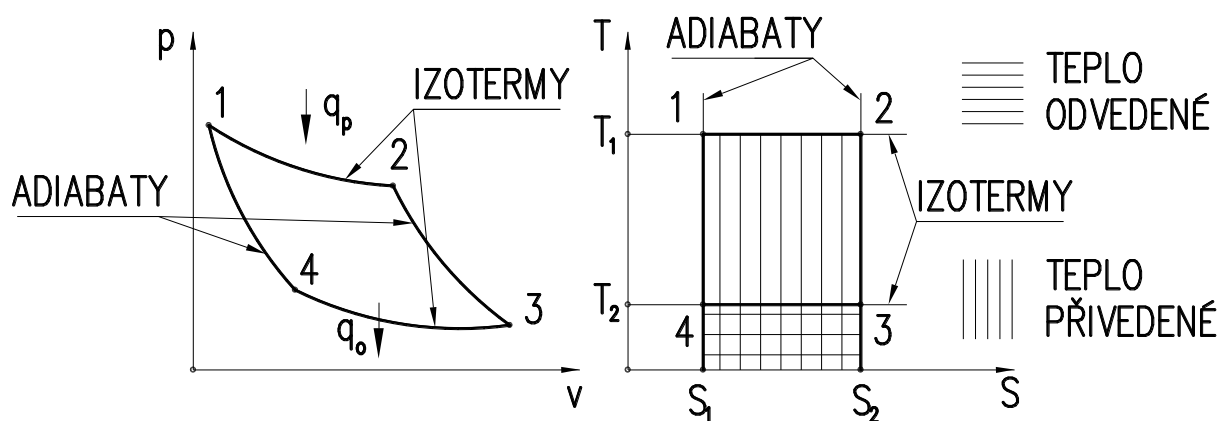
q_p – teplo přivedené v pracovním cyklu;

q_o – teplo odvedené;

q – teplo využité.

5.6.1 Carnotův oběh

Je to teoretický (prakticky neproveditelný) oběh, který je tvořen 2 změnami adiabatickými a 2 izotermickými.



1–2	izotermická expanze;
2–3	adiabatická expanze;
3–4	izotermická komprese;
4–1	adiabatická komprese.

Teplo přivedené v průběhu izotermické expanze je T – s diagramu vyjádřeno plochou

$$1-2-s_2-s_1-1 = q_p = T_1 \cdot (s_2 - s_1)$$

Adiabatická expanze i komprese jsou změny stavu bez výměny tepla s okolím, proto v T–s diagramu jsou vyjádřeny svislými úsečkami.

Při **izotermické kompresi** odvádíme teplo $q_o = 3-4-s_1-s_2-3 = T_2 \cdot (s_2 - s_1)$

Termická účinnost Carnetova oběhu:

$$\eta_t = 1 - \frac{q_o}{q_p} = 1 - \frac{T_2 \cdot (s_2 - s_1)}{T_1 \cdot (s_2 - s_1)} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Carnotův oběh je oběh, který dosahuje nejvyšší termické účinnosti mezi teplotami T_1 a T_2 .

5.6.2 Oběh zážehového spalovacího motoru

5.6.2.1 Čtyřdobý:

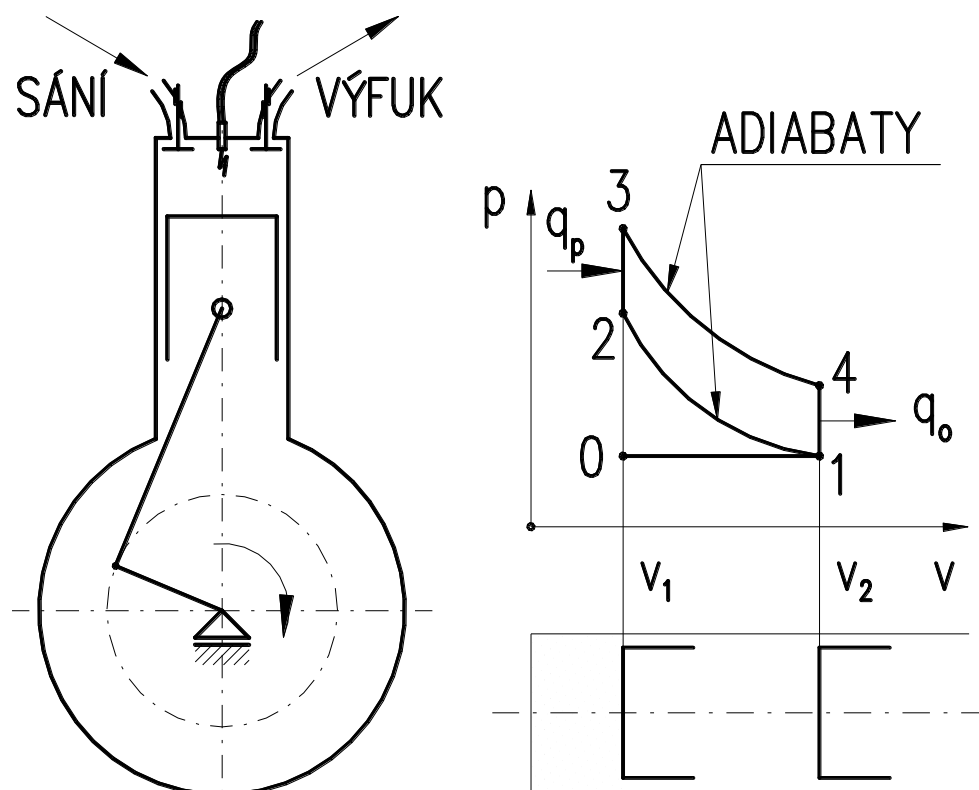
Sací a výfukový ventil jsou převodovým mechanismem spojeny s klikovým mechanismem tak, aby se otevíraly ve stanovený okamžik vždy za 2 otáčky klikového mechanismu.

První doba – při pohybu pístu ke klikovému mechanismu je otevřen sací ventil, kterým se nasává do válce směs paliva se vzduchem.

Druhá doba – při pohybu pístu směrem k hlavě motoru jsou oba ventily zavřeny a směs se stlačuje.

Třetí doba – když dosáhne píst horní úvratě (krajní polohy), dojde k zažehnutí směsi elektrickou jiskrou, vzniklé plyny se rozpínají, tlačí na píst, který se pohybuje směrem dolů a konají práci.

Čtvrtá doba – při pohybu pístu nahoru je otevřen výfukový ventil a vytlačí se spálené plyny.



- 0–1 sání (izobarické) – $p = \text{konst.}$;
- 1–2 komprese (adiabatická) – $p \cdot V^\kappa = \text{konst.}$, $q = 0$;
- 2–3 hoření (izochorické) – $V = \text{konst.}$;
- 3–4 expanze (adiabatická);
- 4–1–0 výfuk.

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t$$

$$q_p = c_v \cdot (T_3 - T_2)$$

$$q_o = c_v \cdot (T_4 - T_1)$$

$$\eta_t = 1 - \frac{q_o}{q_p} = 1 - \frac{c_v \cdot (T_4 - T_1)}{c_v \cdot (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{\frac{T_4}{T_2} - \frac{T_1}{T_2}}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \dots$$

Pro adiabatické změny platí:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1}, \quad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\kappa-1}$$

$$V_2 = V_3; V_1 = V_4 \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$$

$$\dots \eta_t = 1 - \frac{\overbrace{\frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{T_3}{T_2} - \frac{T_1}{T_2}}^{\frac{T_1}{T_2}}}{\frac{T_3}{T_2} - 1} = 1 - \frac{\frac{T_1}{T_2} \cdot \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}{\frac{T_3}{T_2} - 1} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Poměr $\frac{V_1}{V_2} = \varepsilon$ = kompresní poměr

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\kappa-1} = \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}$$

$$\boxed{\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}}$$

Účinnost tedy ovlivňuje kompresní poměr ε (je omezen teplotou vznícení směsi) a adiabatický exponent κ (je dán chemickým složením směsi).

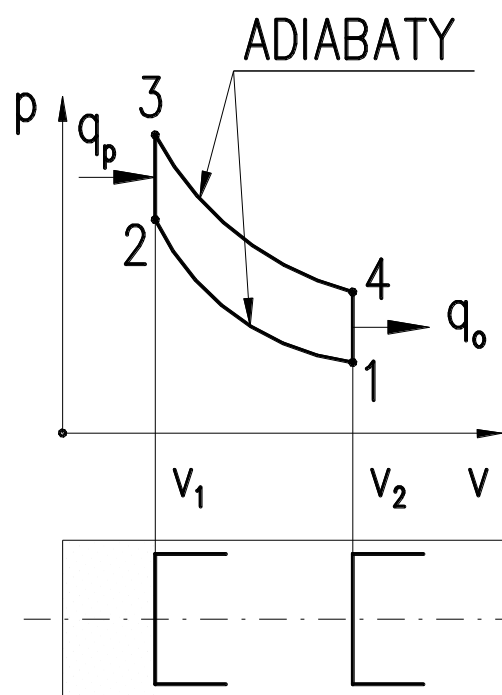
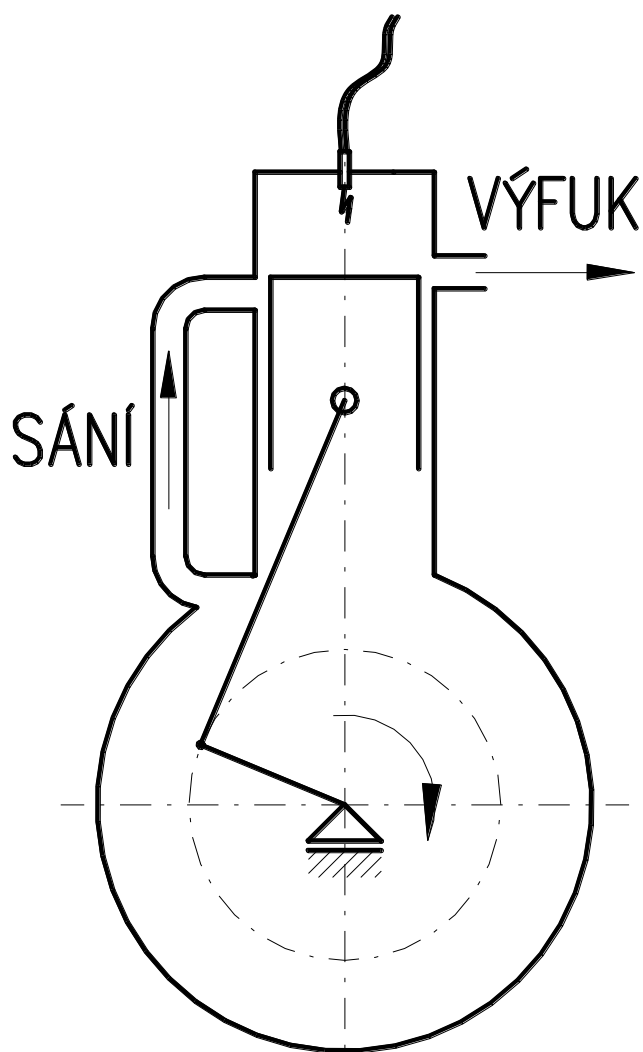
5.6.2.2 Dvoudobý:

Dvoudobý motor nemá ventily, má jen otvory ve stěně válce, které jsou otevírány a zavírány pístem.

První doba – když je píst v dolní poloze, jsou otevřeny sací i výfukový kanál a do válce je nasávána směs paliva se vzduchem. Protože vstupuje do válce s větším tlakem než je atmosferický (klikový hřídel s protizávažím působí jako dmychadlo), vytlačí spálené plyny.

Druhá doba – když píst při pohybu vzhůru zakryje oba kanálky, dochází ke stlačení směsi, která je v horní úvrati zapálena. Při pohybu zpět konají rozpínající se plyny práci.

Poznámka: nejdříve se otevře výfukový otvor, tlak jde ven, pak se otevře sání a přetlak, sací směsi vytlačí zbytky shořených plynů. Účinnost dvoudobých motorů je nižší než u čtyřdobých, protože část směsi se vyfoukne se zbytkem shořených plynů.



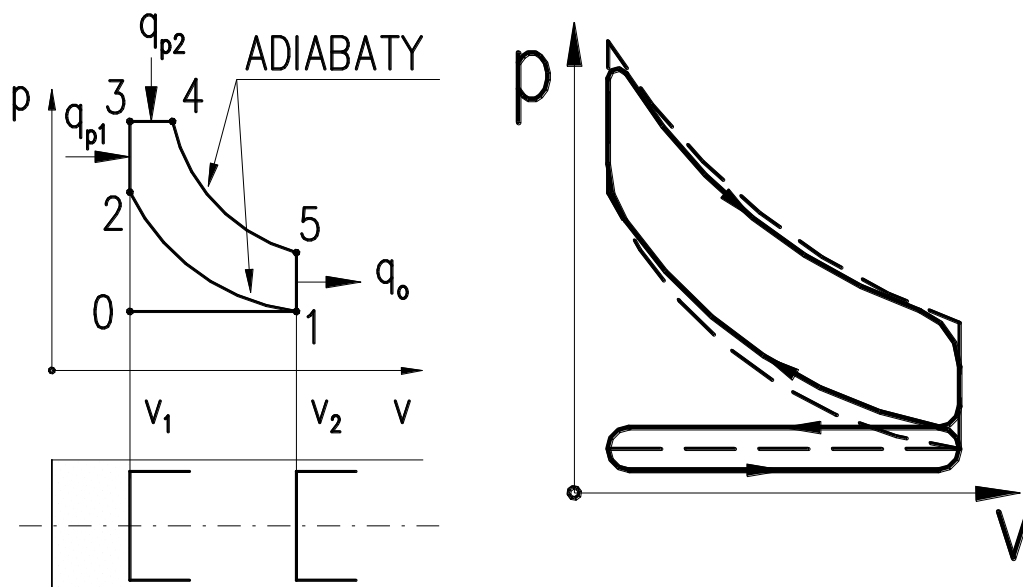
1–2	komprese;
2–3	hoření;
3–4	expanze;
4–1	sání + výfuk.

5.6.3 Vznětové motory

Mají stejný princip jako zážehové, jen ke vznícení směsi nedochází elektrickou jiskrou, ale tím, že do vzduchu, který při stlačení dosáhl vysoké teploty, je vstříknuto palivo, které se při této teplotě samo vznítí.

5.6.3.1 Oběh vznětového spalovacího motoru (naftové motory)

Pracovní cyklus vznětového spalovacího motoru je znázorněn tzv. smíšeným oběhem, u kterého předpokládáme, že část paliva hoří za stálého objemu a zbylé množství za stálého tlaku.



- 0–1 sání – $p = \text{konst.}$;
- 1–2 adiabatická komprese – $p \cdot V^\kappa = \text{konst.}$;
- 2–3 izochorické hoření – $V = \text{konst.}$;
- 3–4 izobarické hoření – $p = \text{konst.}$;
- 4–5 adiabatická expanze – $p \cdot V^\kappa = \text{konst.}$;
- 5–1–0 výfuk (5–1 ochlazení izochorické – $V = \text{konst.}$, 1–0 výfuk – $p = \text{konst.}$)

$$\eta_t = 1 - \frac{q_o}{q_p} = 1 - \frac{q_o}{q_{p1} + q_{p2}}$$

$$q_o = c_v \cdot (T_5 - T_1), \quad q_{p1} = c_v \cdot (T_3 - T_2), \quad q_{p2} = c_p \cdot (T_4 - T_3), \quad \frac{c_v}{c_p} = \kappa, \quad \varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$$

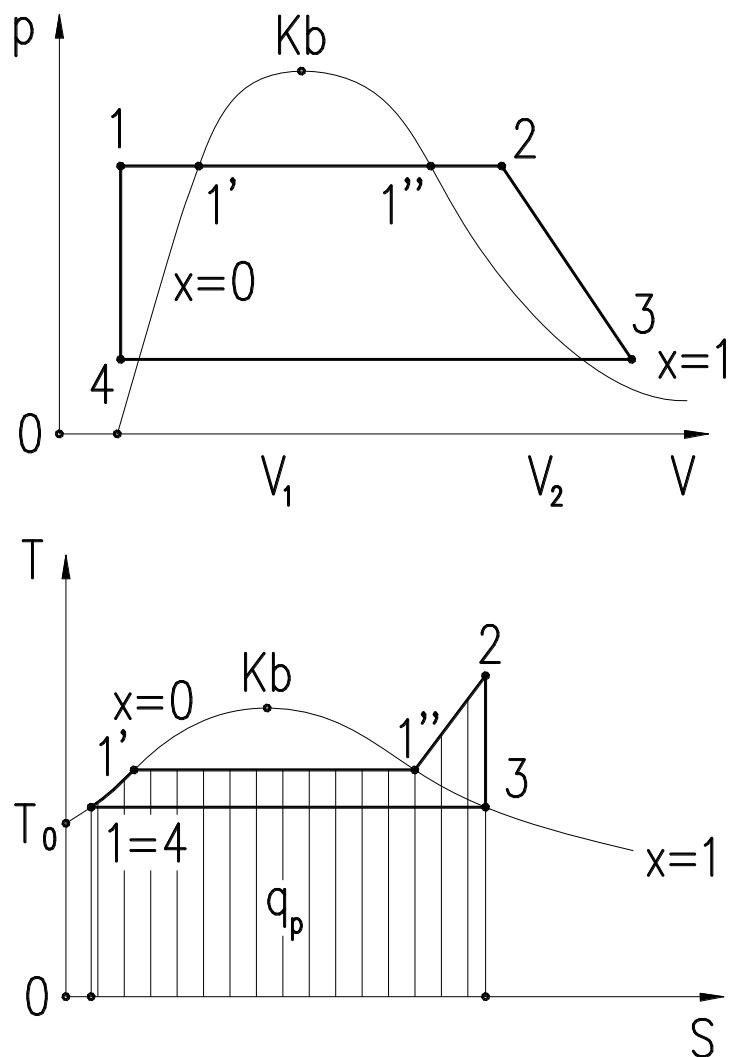
$$\text{Stupeň izochorického zvýšení tlaku: } \psi = \frac{p_3}{p_2}$$

$$\text{Stupeň izobarického zvýšení objemu: } \varphi = \frac{v_4}{v_3}$$

$$\boxed{\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \cdot \frac{\psi \cdot \varphi^\kappa - 1}{\kappa \cdot \varphi \cdot \psi - \psi \cdot (\kappa - 1) - 1}}$$

Ve skutečnosti jsou komprese a expanze polytropické, spalování ani výfuk neproběhnou okamžitě, takže nejsou izochorické.

5.6.4 Oběh parních turbín



- 1–2 přeměna na přehřátou páru;
 1–1' ohřev vody na bod varu;
 1'–1'' změna skupenství;
 1''–2 přehřátí páry;
 2–3 adiabatická expanze páry v turbíně;
 3–4 kondenzace (zkapalnění páry za turbínou);
 4–1 zvýšení tlaku vody.

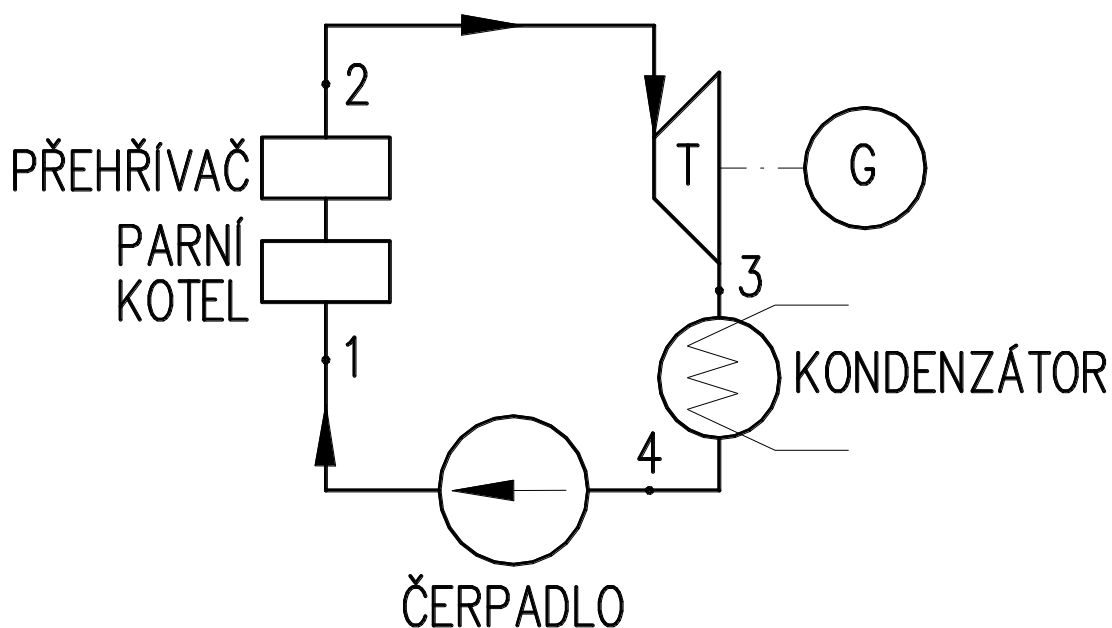
Množství přivedeného (odvedeného) tepla určíme jako rozdíl entalpií:

$$q_p = i_2 - i_1$$

$$q_o = i_3 - i_4$$

Termická účinnost: $\eta_t = 1 - \frac{q_o}{q_p} = 1 - \frac{i_3 - i_4}{i_2 - i_1}$

5.6.5 Schéma parní elektrárny (kondenzační oběh)



Čerpadlem je dopravována upravená voda do parního kotle. Tam vzroste tlak z p_4 na p_1 . V parním kotli dochází k izobaricko – izotermickému vypařování (izobarické proto, že pára je nepřetržitě odebírána nebo odpouštěna pojistnými ventily při zmenšeném odběru). Po dosažení meze sytosti proudí pára do přehříváče, kde je za $p = konst.$ přehřívána na teplotu T_2 , čímž vzniká přehřátá pára, která v turbíně adiabaticky expanduje a tím koná práci T_3 . Mokrá pára pak pokračuje do kondenzátoru, kde dochází k izobaricko – izotermické kondenzaci.

Práce získaná v turbíně:

$$w = q_p - q_o = i_2 - i_1 - \left(i_3 - \overset{\substack{i_4 = i_1 \\ \text{viz. obrázek}}}{\overbrace{i_4}} \right) = i_2 - i_1 - (i_3 - i_1) = i_2 - i_3$$

$i_4 = i_1$ (viz. obrázek).

5.7 Sdílení tepla

Tato část termomechaniky se zabývá zákony šíření tepla. Je to děj složitý, který si v praxi zjednodušíme.

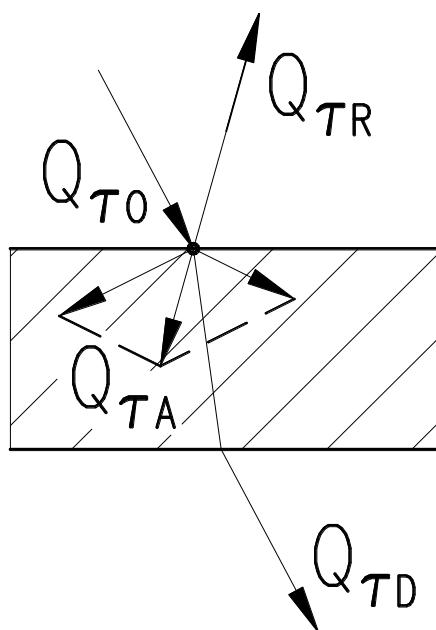
Sdílení tepla rozdělujeme na sdílení tepla:

- Sáláním** (zářením, radiací).
- Prouděním** (konvekci).
- Vedením** (kondukcí, sdílením).

5.7.1 Sdílení tepla sáláním

Výměna tepla sáláním mezi tělesy je výsledkem dvojí přeměny energie: tepelná → sálavá → tepelná. Energie sálání (tepelného záření) vzniká v tělese na vrub energie tepelné. Zákony šíření, odrazu a lomu světelných paprsků můžeme použít i pro tepelné záření. Tepelné záření je část elektromagnetického vlnění v oblasti $0,8 - 40 \mu\text{m}$ = infračervené vlnění.

Každé těleso vyzařuje energii. Dopadá-li tato energie na jiné těleso, je částečně pohlcena – změní se v teplo, část se odráží a část přechází na jiná tělesa.



$$Q_{\tau O} = Q_{\tau R} + Q_{\tau A} + Q_{\tau D}$$

$Q_{\tau O}$ – teplo dopadající na těleso;

$Q_{\tau R}$ – teplo odražené (reflected);

$Q_{\tau A}$ – teplo pohlcené (absorbed);

$Q_{\tau D}$ – teplo procházející tělesem.

$$\frac{Q_{\tau A}}{Q_{\tau O}} + \frac{Q_{\tau R}}{Q_{\tau O}} + \frac{Q_{\tau D}}{Q_{\tau O}} = 1$$

$\frac{Q_{\tau A}}{Q_{\tau O}}$ – poměrná tepelná pohltivost;

$\frac{Q_{\tau R}}{Q_{\tau O}}$ – poměrná tepelná odrazivost;

$\frac{Q_{\tau D}}{Q_{\tau O}}$ – poměrná průteplivost.

Pro tuhá tělesa a kapaliny platí:

$\frac{Q_{\tau D}}{Q_{\tau O}} = 0 \rightarrow$ prakticky žádné teplo neprochází, potom:

$$\frac{Q_{\tau A}}{Q_{\tau O}} + \frac{Q_{\tau R}}{Q_{\tau O}} = 1$$

Tudíž těleso, které dobře pohlcuje teplo, špatně teplo odráží a naopak. Pohltivost a odrazivost záleží z velké části na barvě povrchu. Praktické použití: světlé barvy chladících zařízení, tropických obleků ...

Sálavost dokonale černého tělesa vyjadřuje **Stefanův – Boltzmanův zákon**.

$$Q_{\tau 0} = c_o \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 [W]$$

c_o – součinitel sálání dokonale černého tělesa $[W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}]$

T – teplota povrchu tělesa [K]

U dokonale černého tělesa je všechno dopadající teplo pohlceno.

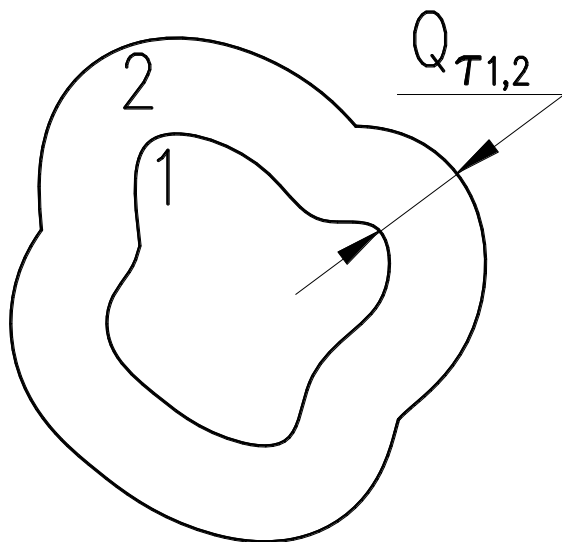
Pro šedé těleso:

$$Q_{\tau} = c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 [W]$$

Pro porovnání zavádíme **poměrnou tepelnou pohltivost ε** :

$$\varepsilon = \frac{Q_{\tau}}{Q_{\tau 0}} = \frac{c}{c_o}$$

Sálání mezi dvěma plochami:



$$Q_{\tau 1,2} = \varepsilon_{1,2} \cdot c_o \cdot S_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$$

Kde:

S_1 – povrch menšího tělesa;

S_2 – povrch většího tělesa;

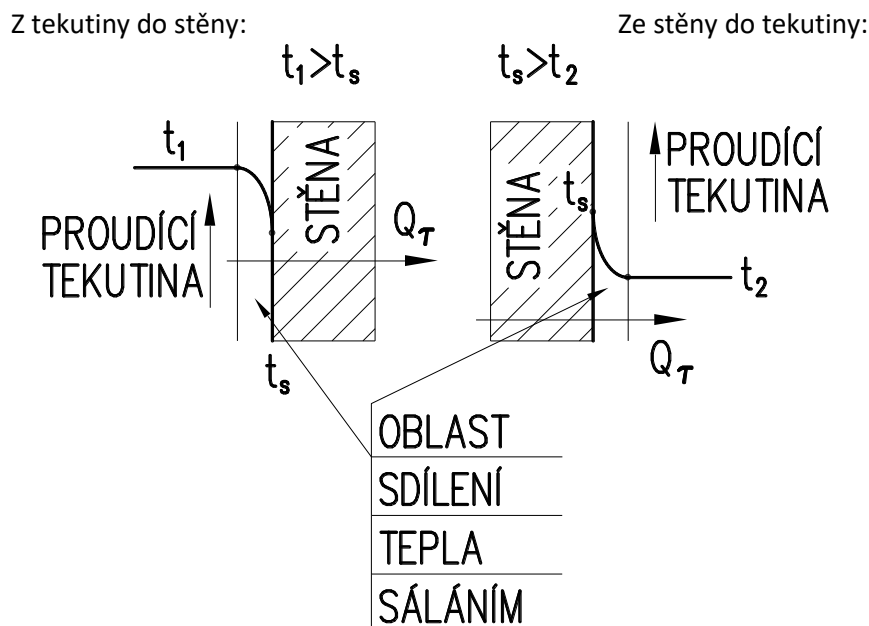
$\varepsilon_{1,2}$ – složená pohltivost;

ε_1 – poměrná pohltivost menšího tělesa;

ε_2 – poměrná pohltivost většího tělesa.

5.7.2 Sdílení tepla prouděním

Dochází k němu při styku tekutiny (kapaliny, plynu) s pevnou stěnou, kdy se tenká vrstva kapaliny při stěně ohřívá (ochlazuje).



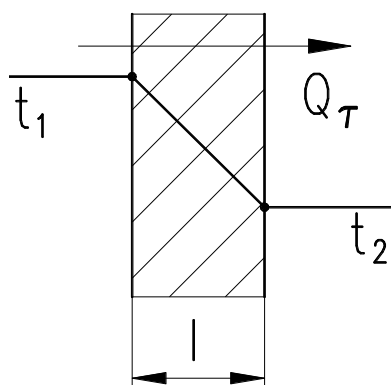
Množství proteklého tepla je závislé na součiniteli přestupu tepla α , na velikosti plochy S a na rozdílu teplot Δt .

$$Q_\tau = \alpha \cdot S \cdot \Delta t \text{ [W]}, \quad \alpha \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \right]$$

Součinitel přestupu tepla α závisí na rychlosti proudění, tvaru a rozměrech trubky, tepelné vodivosti, hustotě, tlaku, viskozitě a drsnosti stěn. α je v tabulkách.

5.7.3 Sdílení tepla vedením

Na teplo prostupující stěnou má vliv tepelná vodivost, rozdíl teplot a tloušťka stěny.



$$Q_\tau = \frac{\lambda}{l} \cdot S \cdot \Delta t \text{ [W]}$$

λ – součinitel tepelné vodivosti stěny $\left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$;

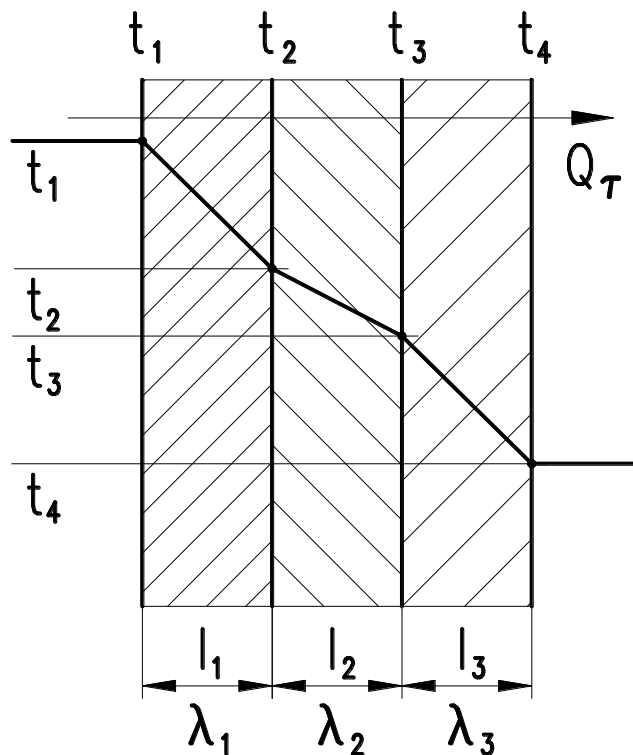
l – síla (tloušťka) stěny;

λ – vyjadřuje množství tepla, které projde 1 m^2 stěny tloušťky 1 m při rozdílu teplot před a za stěnou 1 K za 1 s.

$\frac{\lambda}{l}$ se nazývá **tepelná propustnost stěny**, $\frac{l}{\lambda}$ **tepelný odpor stěny**.

Teplota se v přímé stěně mění podle přímky.

Složená stěna:



$$Q_{\tau 1} = \frac{\lambda_1}{l_1} \cdot S \cdot (t_1 - t_2) \rightarrow t_1 - t_2 = \frac{Q_{\tau 1} \cdot l_1}{\lambda_1 \cdot S}$$

$$Q_{\tau 2} = \frac{\lambda_2}{l_2} \cdot S \cdot (t_2 - t_3) \rightarrow t_2 - t_3 = \frac{Q_{\tau 2} \cdot l_2}{\lambda_2 \cdot S}$$

$$Q_{\tau 3} = \frac{\lambda_3}{l_3} \cdot S \cdot (t_3 - t_4) \rightarrow t_3 - t_4 = \frac{Q_{\tau 3} \cdot l_3}{\lambda_3 \cdot S}$$

Předpoklad: stěna teplo jen vede, ne pohlcuje. Potom:

$$Q_{\tau} = Q_{\tau 1} = Q_{\tau 2} = Q_{\tau 3}$$

Pokud z těchto rovnic vyloučíme t_2 , t_3 sečtením levých stran rovnic a pravých stran rovnic, pak dostaneme vztah:

$$t_1 - t_4 = \frac{Q_{\tau}}{S} \cdot \left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3} \right)$$

$$\text{Potom: } Q_{\tau} = \frac{t_1 - t_4}{\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3}} \cdot S$$

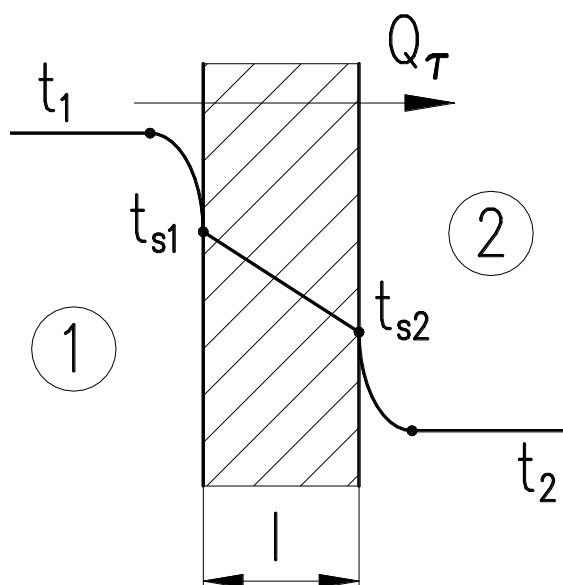
$$\text{Obecně pro } n \text{ vrstev: } Q_{\tau} = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i}} \cdot S$$

Průtok tepla složenou válcovou stěnou:

$$Q_{\tau} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

Teplota uvnitř válcové stěny se mění podle logaritmické křivky.

5.7.4 Prostup tepla stěnou



Přestup tepla stěnou můžeme rozdělit do 3

fází:

- 1) Přestup tepla z prostředí 1 do stěny.
- 2) Vedení tepla stěnou.
- 3) Přestup tepla ze stěny do prostředí 2.

Množství tepla, které za jednotku času projde jednotlivými fázemi je stejné.

$$\text{Pro 1. fázi platí: } Q_{\tau} = \alpha_1 \cdot S \cdot (t_1 - t_{s1}) \rightarrow t_1 - t_{s1} = \frac{Q_{\tau}}{\alpha_1 \cdot S}$$

$$\text{Pro 2. fázi: } Q_{\tau} = \frac{\lambda}{l} \cdot S \cdot (t_{s1} - t_{s2}) \rightarrow t_{s1} - t_{s2} = \frac{Q_{\tau} \cdot l}{\lambda \cdot S}$$

$$\text{Pro 3 fázi: } Q_{\tau} = \alpha_2 \cdot S \cdot (t_{s2} - t_2) \rightarrow t_{s2} - t_2 = \frac{Q_{\tau}}{\alpha_2 \cdot S}$$

Sečteme-li levé strany rovnic a pravé strany rovnic, dostaneme vztah:

$$t_1 - t_2 = \frac{Q_{\tau}}{S} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)$$

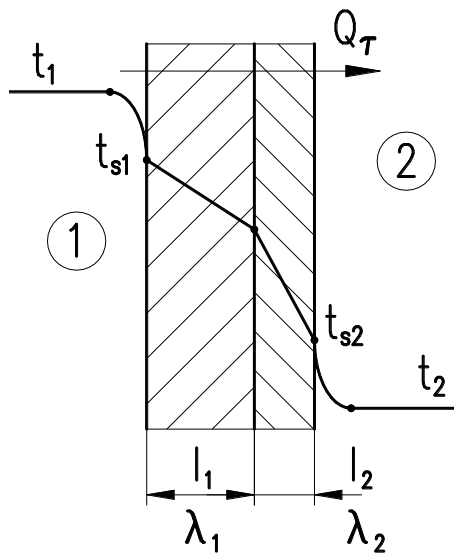
Prostup tepla je vyjádřen rovnicí:

$$Q_{\tau} = S \cdot \overbrace{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}}^{\text{součinitel prostupu tepla stěnou}} \cdot (t_1 - t_2)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \text{součinitel prostupu tepla stěnou } K$$

$$Q_{\tau} = S \cdot K \cdot (t_1 - t_2)$$

Pokud je stěna tvořena 2 nebo více vrstvami:



$$Q_{\tau} = S \cdot K \cdot (t_1 - t_2)$$

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Př.: Jaký je součinitel prostupu tepla při přechodu tepla ocelovou stěnou tloušťky 4 mm z kouřových plynů do horké vody, je-li $\alpha_1 = 18,6 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\alpha_2 = 2330 \text{ W/m}^2\text{K}$? Tepelná vodivost oceli $\lambda = 47 \text{ W/mK}$.

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{18,6} + \frac{0,004}{47} + \frac{1}{2330}} = 18,31 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Př.: Určete velikost plochy stěny, kterou má projít 5 kW tepla, jestliže teplota spalin je $t_1 = 250^\circ\text{C}$, teplota vody 80°C ? Součinitel prostupu tepla stěnou $K = 18,42 \text{ W/m}^2\text{K}$, $t_1 = 250^\circ\text{C}$, $t_2 = 80^\circ\text{C}$.

$$Q_{\tau} = S \cdot K \cdot (t_1 - t_2) \rightarrow S = \frac{Q_{\tau}}{K \cdot (t_1 - t_2)} = \frac{5000}{18,31 \cdot (250 - 80)} = 1,61 \text{ m}^2$$

Př.: Určete součinitel prostupu tepla složenou stěnou, která je tvořena pálenou cihlou tloušťky 30 cm, $\lambda_1 = 0,87 \text{ W/mK}$ a polystyrenem tloušťky 5 cm, tepelná vodivost $\lambda_2 = 0,041 \text{ W/mK}$. $\alpha_1 = \alpha_2 = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Určete o kolik % se sníží součinitel prostupu tepla přidáním polystyrenu na cihlovou stěnu.

$$K_c = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{25} + \frac{0,3}{0,87} + \frac{1}{25}} = 2,35 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$K_{cp} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{25} + \frac{0,3}{0,87} + \frac{0,05}{0,041} + \frac{1}{25}} = 0,608 \text{ W/m}^2\text{K}$$

2,35.....100%

0,608.....x%

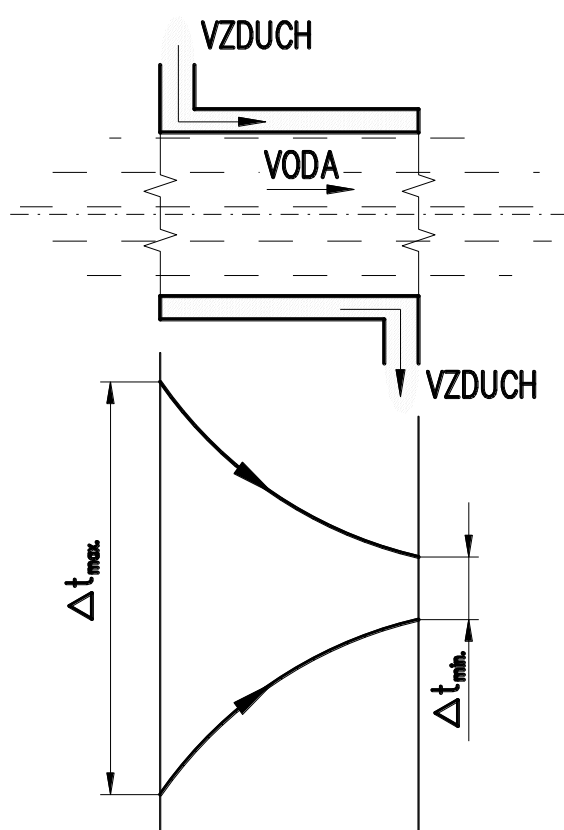
$$x = \frac{100 \cdot 0,608}{2,35} \doteq 26\%$$

Sníží se o 74 %.

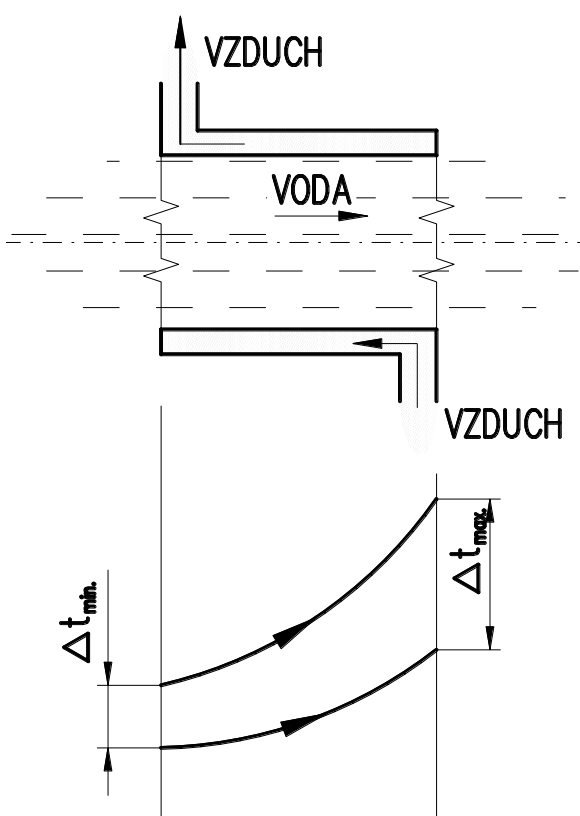
5.7.5 Výměníky tepla

Výměník tepla je jakýkoliv ohřívač plynů nebo kapalin. Na rozdíl od prostupu tepla stěnou není rozdíl teplot před a za stěnou konstantní.

Souproudý výměník tepla:



Protiproudý výměník tepla:



Postup tepla u výměníku tepla je dán rovnicí:

$$Q_{\tau} = K \cdot S \cdot \delta_s$$

K – součinitel prostupu tepla stěnou.

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

S – velikost výhřevné plochy výměníků.

δ_s – střední teplotní spád (rozdíl).

$$\text{Je-li: } \frac{\Delta t_{\max}}{\Delta t_{\min}} < 2 \rightarrow \delta_s = \frac{\Delta t_{\max} + \Delta t_{\min}}{2}$$

$$\text{Je-li: } \frac{\Delta t_{\max}}{\Delta t_{\min}} \geq 2 \rightarrow \delta_s = \frac{\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}}{\ln \frac{\Delta t_{\max}}{\Delta t_{\min}}} \cdot \frac{\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}}{2,3 \cdot \log \frac{\Delta t_{\max}}{\Delta t_{\min}}}$$

Spotřebu chladící nebo topné látky spočítáme ze vztahu:

$$Q = m_1 \cdot c_{p1} \cdot \Delta t_1 = m_2 \cdot c_{p1} \cdot \Delta t_2$$

m – hmotnost tekutiny;

c_p – měrné teplo tekutiny;

Δt – rozdíl teplot tekutiny.

Př.: V protiproudém výměníku o ploše 12 m² se má ochlazovat 4200 kg oleje z $t_1 = 195^\circ\text{C}$ na $t_2 = 50^\circ\text{C}$. Chlazení je prováděno vodou, která má na vstupu teplotu $t_1 = 15^\circ\text{C}$, na výstupu $t_2 = 55^\circ\text{C}$. Za jak dlouho se olej ochladí, je-li $K = 175 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$, měrné teplo oleje

$$c = 2,42 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} ?$$

$$\Delta t_{\max} = 195 - 55 = 140^\circ\text{C}$$

$$\Delta t_{\min} = 50 - 15 = 35^\circ\text{C}$$

$$\frac{\Delta t_{\max}}{\Delta t_{\min}} = \frac{140}{35} = 4 > 2 \rightarrow \delta_s = \frac{\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}}{\ln \frac{\Delta t_{\max}}{\Delta t_{\min}}} = \frac{140 - 35}{\ln \frac{140}{35}} = 75,7$$

$$Q_\tau = K \cdot S \cdot \delta_s = 175 \cdot 12 \cdot 75,4 = 158970 \text{ W}$$

$$Q_\tau = \frac{m_o}{\tau} \cdot c_o \cdot \Delta t_o$$

$$158970 = \frac{4200}{\tau} \cdot 2420 \cdot 145 \rightarrow \tau = \frac{4200 \cdot 2420 \cdot 145}{158970} = 9271 \text{ s} = 155 \text{ min} = 2,58 \text{ h} = 2 \text{ h } 35 \text{ min} .$$

Seznam použité literatury:

- MRŇÁK L. – DRDLA A.: *MECHANIKA – Pružnost a pevnost pro střední průmyslové školy strojnické*. Praha: SNTL, 1977.
- JULINA M., KOVÁŘ J., VENCLÍK V., *MECHANIKA II – Kinematika pro střední průmyslové školy strojnické*, Praha: SNTL, 1977.
- JULINA M., KOVÁŘ J., VENCLÍK V., *MECHANIKA III – Dynamika pro střední průmyslové školy strojnické*, Praha: SNTL, 1977.
- JULINA M., KOVÁŘ J., VENCLÍK V., *MECHANIKA IV – Mechanika tekutin a termomechanika pro střední průmyslové školy strojnické*, Praha: SNTL, 1977.
- TUREK, I., SKALA, O., HALUŠKA J.: *MECHANIKA – Sbírka úloh*. Praha: SNTL, 1982.
- LEINVEBER, J. – VÁVRA, P.: *Strojnické tabulky*. 5. doplněné vydání. Praha: Albra, 2011. ISBN 80-7361-033-7.