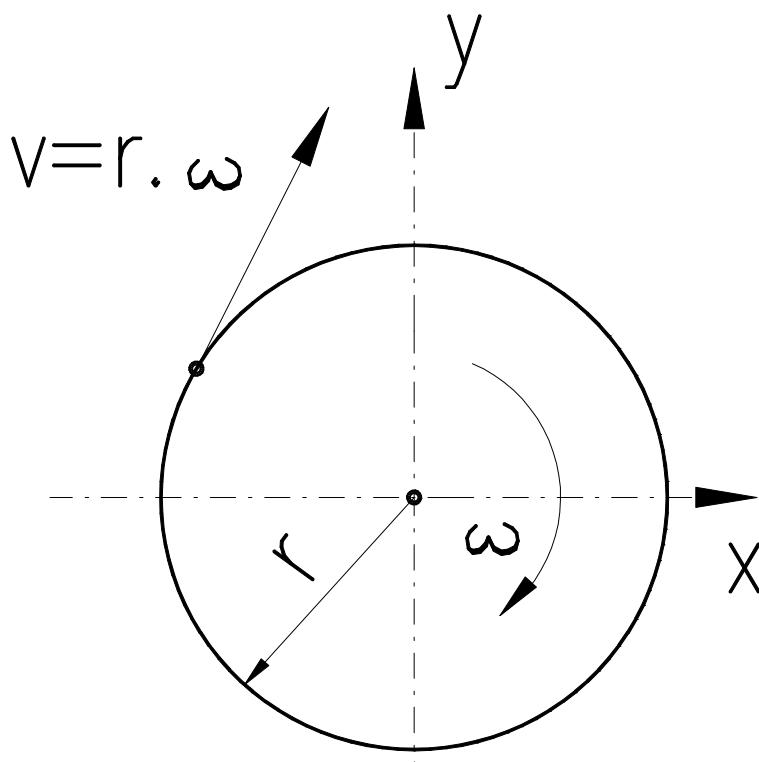


Název a adresa školy:	Střední škola průmyslová a umělecká, Opava, příspěvková organizace, Praskova 399/8, Opava, 746 01
Název operačního programu:	OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost, oblast podpory 1.5
Registrační číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0129
Název projektu	SŠPU Opava – učebna IT
Typ šablony klíčové aktivity:	III/2 Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT (20 vzdělávacích materiálů)
Název sady vzdělávacích materiálů:	MEC IIIa
Popis sady vzdělávacích materiálů:	Mechanika III – dynamika a hydrostatika, 3. ročník.
Sada číslo:	G–20
Pořadové číslo vzdělávacího materiálu:	14
Označení vzdělávacího materiálu: (pro záznam v třídní knize)	VY_32_INOVACE_G–20–14
Název vzdělávacího materiálu:	Kinetická energie rotujícího tělesa
Zhotoveno ve školním roce:	2011/2012
Jméno zhotovitele:	Ing. Karel Procházka

Kinetická energie rotujícího tělesa

Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje po kružnici o poloměru r kolem osy procházející těžištěm.



$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$v = r \cdot \omega$$

Energie translačního pohybu:

$$E_{Kt} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

Energie rotačního pohybu:

$$E_{Kr} = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2$$

I_0 – poloměr setrvačnosti, $I_0 = m \cdot r^2$

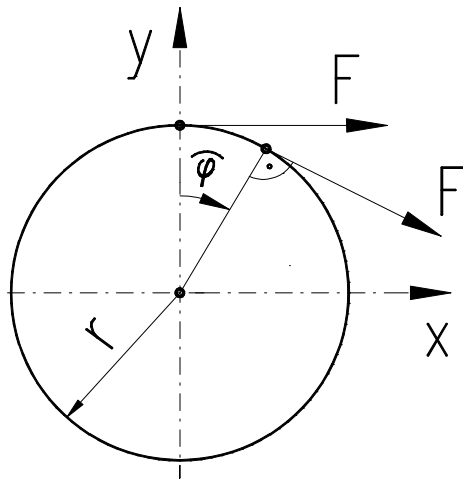
Práce zrychlujících sil

Moment zrychlující síly působící na těleso:

$$(F = m \cdot a, \quad a_t = r \cdot \varepsilon, \quad \text{moment setrvačnosti } I = m \cdot r^2, \quad \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t})$$

$$M = F \cdot r = m \cdot a_t \cdot r = m \cdot r \cdot \varepsilon \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \varepsilon = I \cdot \varepsilon$$

Práce zrychlujících sil působících na rotující těleso se projeví změnou kinetické (rotační) energie.



$$s = r \cdot \hat{\varphi}$$

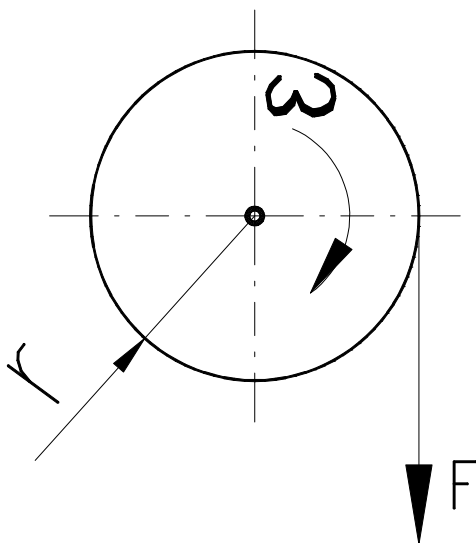
$$W = F \cdot s = F \cdot r \cdot \hat{\varphi} = M \cdot \hat{\varphi}$$

$$W = E_r - E_{or}$$

$$M \cdot \hat{\varphi} = \overbrace{\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2}^{\text{Pohybová energie}} - \overbrace{\frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega_0^2}^{\text{Pocáteční energie}}$$

$$M \cdot \hat{\varphi} = I_0 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2}$$

Př.: Jakou práci spotřebuje setrvačnick, který se z klidu rozbíhá na otáčky $n = 3$ ot/s. Kolik přitom proběhne otáček, působí-li hnací síla $F = 250$ N na poloměru $r = 1$ m? Dáno: $I_0 = 1260$ kg · m².



Spotřeba práce:

$$\begin{aligned} W &= I_0 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = I_0 \cdot \frac{\omega^2}{2} \\ &= I_0 \cdot \frac{2^2 \cdot \pi^2 \cdot n^2}{2} = I_0 \cdot 2 \cdot \pi^2 n^2 = \\ &= 1260 \cdot 2 \cdot \pi^2 \cdot 3^2 = 223843 \text{ J} \end{aligned}$$

$$W = M \cdot \hat{\varphi} = F \cdot r \cdot \hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{W}{F \cdot r} = \frac{223843}{250 \cdot 1} = 895 \text{ rad}$$

$$\hat{\varphi} = 2 \cdot \pi \cdot i \rightarrow i = \frac{\hat{\varphi}}{2 \cdot \pi} = \frac{895}{2 \cdot \pi} = 142,5 \text{ ot}$$

Impuls momentu a moment hybnosti

Podobně jako impuls síly a hybnost $F \cdot t = m \cdot v$ platí:

$$M \cdot t = I \cdot \omega$$

(I – moment setrvačnosti).

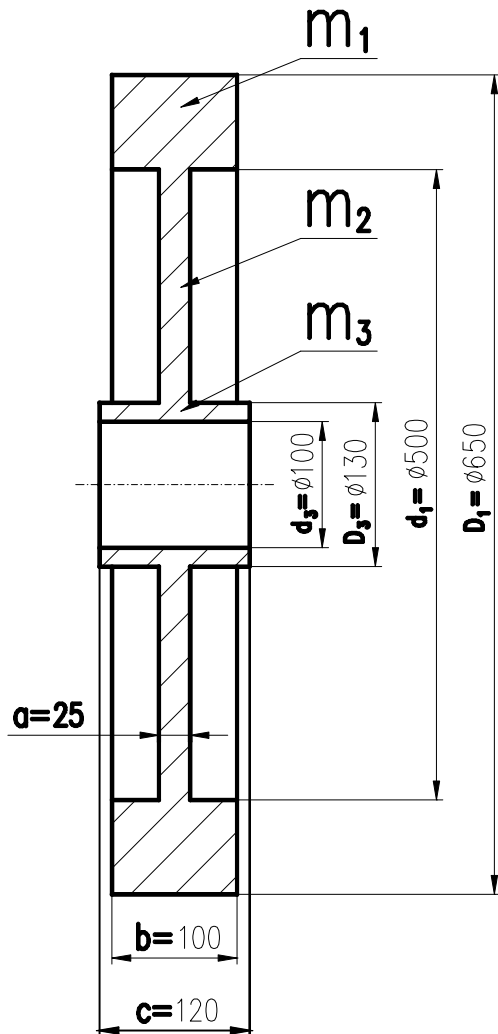
Shrnutí dynamiky posuvného a rotačního pohybu

Jednoduše transformujeme: $F \rightarrow M$; $m \rightarrow I_0$; $v \rightarrow \omega$; $a \rightarrow \varepsilon$; $s \rightarrow \varphi$

	Posuvný pohyb (translační)	Pohyb rotační
Základní rovnice	$F = m \cdot a$	$M = I_0 \cdot \varepsilon$
Kinetická energie	$E_{Kt} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	$E_{Kr} = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2$
Práce zrychlujících sil	$W = F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot (v^2 - v_0^2)$	$W = M \cdot \varphi = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)$
Impuls a hybnost	$F \cdot t = m \cdot (v - v_0)$	$M \cdot t = I_0 \cdot (\omega - \omega_0)$

Př.: Setrvačnick hnacího stroje s otáčkami $n_0 = 6,6 \text{ s}^{-1}$ má měrnou hmotnost $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Určete moment setrvačnosti setrvačnicku I_0 a setrvačný moment $m \cdot D^2$. Bude-li stroj přetížen, klesnou jeho otáčky o 10 %. Jakou přitom setrvačnick vykoná práci? Zabrzdí-li se setrvačnick za 5 otáček, jaké je potřeba brzdící síly na obvodě a jak velké napětí v krutu vznikne na hřídeli?



$$m_1 = \rho \cdot V_1 = \rho \cdot \pi \cdot \frac{D_1^2 - d_1^2}{4} \cdot b =$$

$$= 7,8 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot \frac{0,65^2 - 0,5^2}{4} \cdot 0,1 = 105,68 \text{ kg}$$

$$m_2 = \rho \cdot V_2 = \rho \cdot \pi \cdot \frac{d_1^2 - D_3^2}{4} \cdot a =$$

$$= 7,8 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot \frac{0,5^2 - 0,13^2}{4} \cdot 0,025 = 35,7 \text{ kg}$$

$$m_3 = \rho \cdot V_3 = \rho \cdot \pi \cdot \frac{D_3^2 - d_3^2}{4} \cdot c =$$

$$= 7,8 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot \frac{0,13^2 - 0,1^2}{4} \cdot 0,12 = 5,07 \text{ kg}$$

$$I_{01} = m_1 \cdot \frac{R_1^2 + r_1^2}{2} = 105,68 \cdot \frac{0,325^2 + 0,25^2}{2} = 8,88 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{02} = m_2 \cdot \frac{r_1^2 + R_3^2}{2} = 35,7 \cdot \frac{0,25^2 + 0,065^2}{2} = 1,19 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{03} = m_3 \cdot \frac{R_3^2 + r_3^2}{2} = 5,07 \cdot \frac{0,065^2 + 0,05^2}{2} = 0,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_0 = I_{01} + I_{02} + I_{03} = 8,88 + 1,19 + 0,02 = 10,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Setrvačný moment $m \cdot D^2$:

$$\overbrace{m \cdot D^2}^{\text{Vzorec}} = 4 \cdot I_0 = 4 \cdot 10,1 = 40,14 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

D – průměr setrvačnosti

$$W = \frac{1}{2} I_0 \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot n_0$$

$$n = 0,9 \cdot n_0 = 0,9 \cdot 6,6 = 5,94 \text{ s}^{-1}$$

(– 10 %)

Máme úbytek kinetické energie, tedy práce vyjde záporná, nedodáváme ji, ale získáváme (nebo prohodíme ω a ω_0).

$$W = \frac{1}{2} I_0 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot [(0,9 \cdot n_0)^2 - n_0^2] = 2 \cdot \pi^2 \cdot I_0 \cdot n_0^2 \cdot (0,9^2 - 1) = 2 \cdot \pi^2 \cdot 10,1 \cdot 6,6^2 \cdot (0,9^2 - 1) = -1650 J$$

$$W = M \cdot \hat{\varphi}$$

$$\text{dráha } \hat{\varphi} = 2 \cdot \pi \cdot i = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 31,4 \text{ rad}$$

$$M = \frac{W}{\hat{\varphi}} = \frac{1650}{31,4} = 52,5 Nm$$

$$M = F \cdot R_1 \rightarrow F = \frac{M}{R_1} = \frac{52,5}{0,325} = 161,7 N \quad (R_1 - \text{na obvodu setrvačníku})$$

$$\tau_K = \frac{M_K}{W_K} \leq \tau_{DovK}$$

$$\tau_K = \frac{M_K}{\frac{\pi \cdot d_3^3}{16}} = \frac{52500 \cdot 16}{\pi \cdot 100^3} = 0,27 MPa$$

Seznam použité literatury:

- MRŇÁK L. – DRDLA A.: *MECHANIKA – Pružnost a pevnost pro střední průmyslové školy strojnické.* Praha: SNTL, 1977.
- JULINA M., KOVÁŘ J., VENCLÍK V., *MECHANIKA II – Kinematika pro střední průmyslové školy strojnické,* Praha: SNTL, 1977.
- JULINA M., KOVÁŘ J., VENCLÍK V., *MECHANIKA III – Dynamika pro střední průmyslové školy strojnické,* Praha: SNTL, 1977.
- JULINA M., KOVÁŘ J., VENCLÍK V., *MECHANIKA IV – Mechanika tekutin a termomechanika pro střední průmyslové školy strojnické,* Praha: SNTL, 1977.
- TUREK, I., SKALA, O., HALUŠKA J.: *MECHANIKA – Sbírka úloh.* Praha: SNTL, 1982.
- LEINVEBER, J. – VÁVRA, P.: *Strojnické tabulky.* 5. doplněné vydání. Praha: Albra, 2011. ISBN 80-7361-033-7.